

Fakulta biomedicínského inženýrství – Teoretická elektrotechnika

Prof. Ing. Jan Uhlíř, CSc.

Léto 2020

3. Výpočty ve frekvenční oblasti

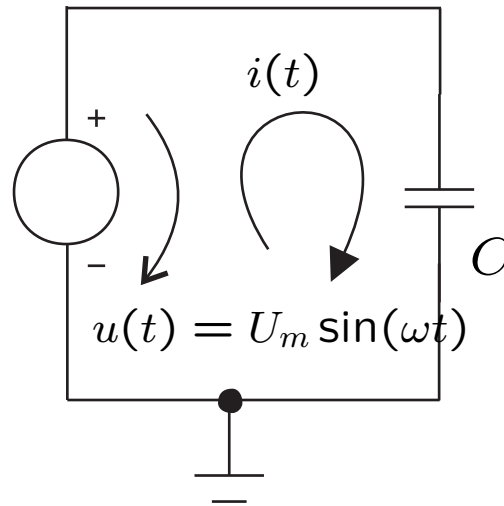
Pro analýzu ve frekvenční oblasti předpokládáme zdroje se sinusovými časovými průběhy napětí, resp. proudu a stav, kdy neprobíhají žádné přechodné děje, způsobené připojením nebo odpojením zdroje nebo součástky. Analyzujeme harmonický ustálený stav. (HUS)

Působí-li v lineárním obvodu zdroj sinusového napětí nebo proudu s danou frekvencí a fází, mají v harmonickém ustáleném stavu všechny obvodové veličiny sinusový průběh s frekvencí zdroje. Od parametrů zdroje ($U_m(I_m)$, φ , ω) se mohou hodnoty obvodových veličin lišit jen amplitudou, fází a příp. rozměrem.

Působí-li v lineárním obvodu více sinusových zdrojů současně, platí princip superpozice a předchozí tvrzení platí pro každý ze zdrojů nezávisle.

Každý nesinusový periodický signál lze rozložit na řadu signálů s frekvencemi, které jsou dány celočíselnými násobky základní (nejnižší) frekvence periodického signálu – Fourierova řada. Pro obecný neperiodický signál – Fourierova transformace.

Kapacitor se sinusovým zdrojem napětí



Budeme nyní předpokládat, že $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Pak s využitím derivace ($i(t) = C \frac{du}{dt}$) dostaneme výraz pro proud – $i(t) = U_m \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$.

Odtud lze najít vztah mezi amplitudou napětí a proudem tak, že platí

$$I_m = U_m \omega C.$$

Setrvačné vlastnosti kapacitoru vedou k tomu, že v harmonickém ustáleném stavu jsou proud procházející kapacitorem a napětí na jeho svorkách fázově posunuty o $\pi/2$. Tak zásadně ovlivňuje kapacitor obvodové veličiny v jakémkoli obvodu se sinusovými signály. Snadno se také přesvědčíme, že díky tomu kapacitor nerozptyluje žádnou energii.

Vzniká otázka, jak takový vliv na fázi obvodových veličin matematicky popsat. Matematika dokázala vstoupit do druhého rozměru vytvořením oboru komplexních čísel.

Elektrotechnika obor komplexních čísel využívá.

Pro harmonický ustálený stav jsou zavedeny fázory – komplexní čísla reprezentující obvodové veličiny sinusového průběhu.

Pro sinusové napětí $U_m \sin(\omega t + \varphi)$ zavedeme v oboru komplexních čísel reprezentanta – fázor

$$\hat{U} = \operatorname{Re}(\hat{U}) + j \operatorname{Im}(\hat{U}) = U_m (\cos \varphi + j \sin \varphi) = U_m e^{j\varphi}$$

Podobně pro proud $I_m \sin(\omega t + \varphi)$ zavedeme v oboru komplexních čísel reprezentanta – fázor

$$\hat{I} = \operatorname{Re}(\hat{I}) + j \operatorname{Im}(\hat{I}) = I_m (\cos \varphi + j \sin \varphi) = I_m e^{j\varphi}$$

Platí tedy

$$U_m = |\hat{U}|, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \hat{U}}{\operatorname{Re} \hat{U}}$$

a podobně pro \hat{I}

Pro fázorovou analýzu obvodů zavedeme další pojem – impedanci

$$\text{Pro rezistor} - \hat{Z}_R = R$$

$$\text{Pro kapacitor} - \hat{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\text{Pro induktor} - \hat{Z}_L = j\omega L$$

Pro řízené zdroje se jedná o přenosový činitel – $\hat{X} = \text{Re}(\hat{X}) + j\text{Im}(\hat{X})$

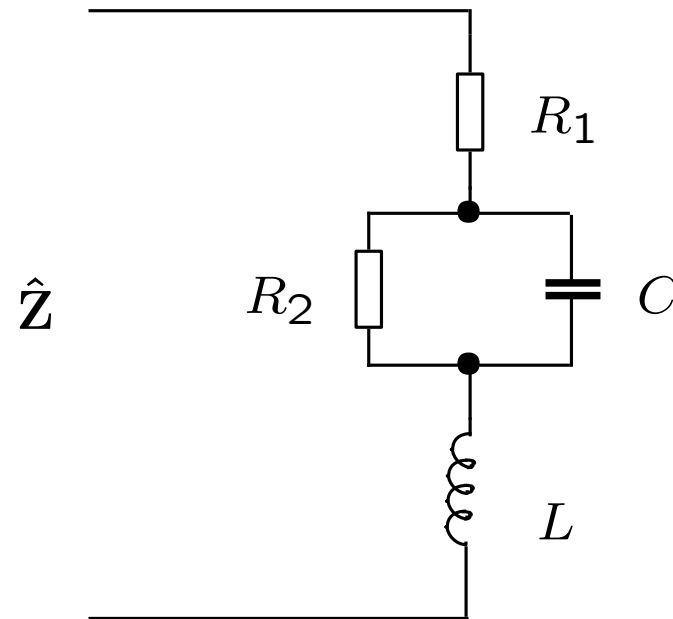
Aparát komplexní aritmetiky nám poskytne prostředek, jak popsat obvodové veličiny s fází libovolně pootočenou – zřejmě jako komplexní čísla s reálnou a imaginární složkou.

V oblasti výpočtů harmonického ustáleného stavu se pro zápis obvodových rovnic podle Kirchhoffových zákonů používá impedancí a zdrojů stejně jako v obvodech s rezistory.

Aplikaci fázorů lze demonstrovat na dříve uvedeném obvodu se zdrojem napětí a kapacitorem:

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{Z}}_C} = j\omega C \hat{\mathbf{U}} \longrightarrow I_m = U_m \omega C, \varphi = \pi/2$$

Výpočet impedance ze schématu RLC obvodu



$$\hat{Z} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

- Popis obvodu v harmonickém ustáleném stavu je prakticky významný proto, že reprezentuje vlastnosti obvodu pro širokou oblast jeho použití.
- Matematický aparát pracuje s komplexními impedancemi a fázory tak, že formulace popisu obvodů je velmi jednoduchá, avšak omezená jen na harmonický ustálený stav – vylučuje výpočet přechodných dějů a popis činnosti obvodu s neharmonickým signálem. Výrazy s fázory (impedance, přenosy a obrazy signálu) nemohou vystupovat ve vztazích pro časové průběhy signálů.
- Matematický popis obvodu dovoluje formulovat komplexní funkci kmitočtu označovanou jako přenosová funkce (přenos) obvodu. Z ní lze odvodit amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku obvodu. Amplitudová charakteristika je většinou zobrazována v logaritmických souřadnicích na obou osách (x - logaritmus frekvence, y - logaritmus absolutní hodnoty přenosu v decibelech [dB]) a fázová charakteristika s logaritmem frekvence a lineární stupnicí fázového úhlu.

- V kvalitativním odhadu vlastností obvodů s kapacitami a induktory lze na „dostatečně“ vysokých kmitočtech považovat kapacitor za zkrat a induktor za rozpojený obvod. Na „dostatečně“ nízkých kmitočtech lze kapacitor považovat za rozpojený obvod a induktor za zkrat.

Pro kapacitor $\hat{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$; bude pro $\omega \rightarrow \infty$, $\hat{Z}_C \rightarrow 0$

Pro kapacitor $\hat{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$; bude pro $\omega \rightarrow 0$, $\hat{Z}_C \rightarrow \infty$

Pro induktor $\hat{Z}_L = j\omega L$; bude pro $\omega \rightarrow \infty$, $\hat{Z}_L \rightarrow \infty$

Pro induktor $\hat{Z}_L = j\omega L$; bude pro $\omega \rightarrow 0$, $\hat{Z}_L \rightarrow 0$

Komplexní výkon

Komplexní výkon v HUS je definován jako součin fázoru napětí a komplexně sdruženého fázoru proudu

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I}^*$$

takže

$$\hat{S} = \frac{1}{2} U_m I_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$P = \operatorname{Re}(\hat{S}) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi, \quad Q = \operatorname{Im}(\hat{S}) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi$$

P je činný výkon, Q je jalový výkon, $S = |\hat{S}| = 1/2 U_m I_m$ je zdánlivý výkon.

Pro efektivní hodnoty proudu a napětí platí

$$P = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi, \quad Q = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi \quad S = U_{ef} I_{ef}$$

Komplexní výkon

Jednotky, které pro výkon v harmonickém ustáleném stavu používáme jsou:

Pro zdánlivý výkon voltampér [VA] – součin změřených voltů a ampérů

Pro činný výkon watt [W] – výkon, který koná práci

Pro jalový výkon voltampér reaktanční [var] – ukládá a vrací energii v bezetrátových elementech

Výkon v zátěži $\hat{\mathbf{Z}}$ připojené ke zdroji napětí $\hat{\mathbf{U}}$ (fázi napětí považujeme za nulovou)

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{Z}}} = \frac{U_m}{|\hat{\mathbf{Z}}|} e^{-j\varphi_z}, \quad \text{kde } \varphi_z \text{ je fáze zátěže } \varphi_z = \arctg\left(\frac{\text{Im}(\hat{\mathbf{Z}})}{\text{Re}(\hat{\mathbf{Z}})}\right)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{I}}^* = \frac{U_m^2}{2|\hat{\mathbf{Z}}|} e^{j\varphi_z} = \frac{U_{ef}^2}{|\hat{\mathbf{Z}}|} e^{j\varphi_z} = \frac{U_{ef}^2}{|\hat{\mathbf{Z}}|} (\cos \varphi_z + j \sin \varphi_z)$$

Pokud je vnitřní impedance zdroje $\hat{\mathbf{Z}}_i$ potom pro zátěž $\hat{\mathbf{Z}}_z$ je splněna podmínka výkonového přizpůsobení tehdy, kdy

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = \hat{\mathbf{Z}}_z^*$$

Pro výkon spotřebičů je definován účinník

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

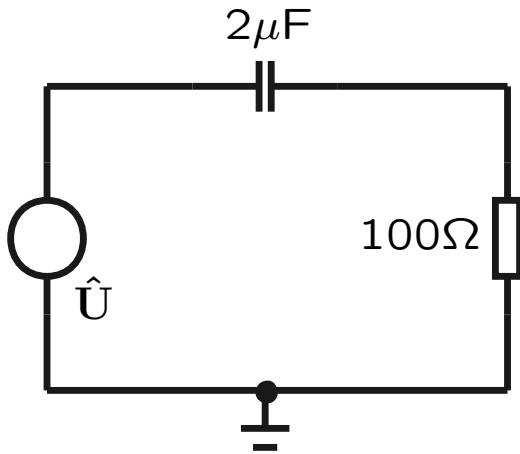
Protože pouze činný výkon vykonává práci, zatímco zdánlivý výkon je celková energie přenesená vodiči za jednotku času, je účinník mírou využití energie zdroje.

Když $\lambda = 1$ je veškerý výkon dodaný zdrojem využit v zátěži.

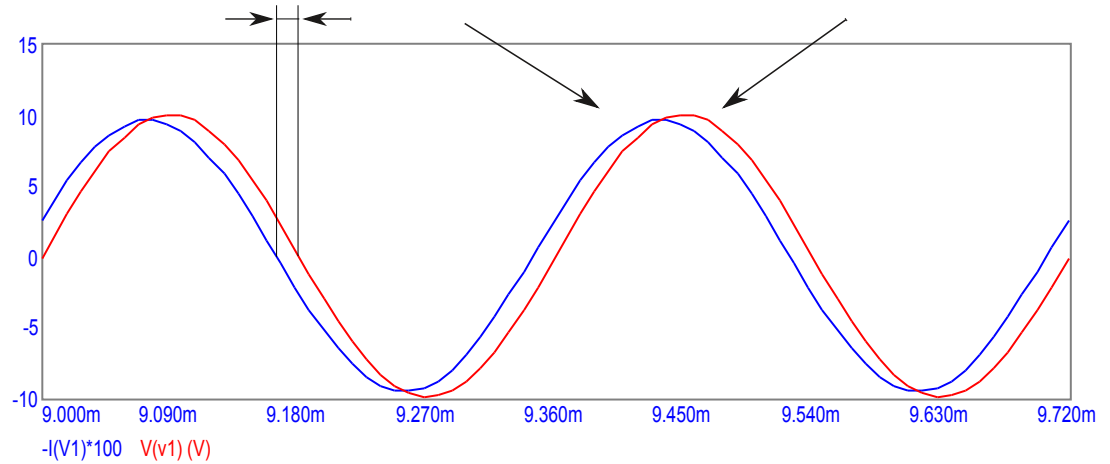
Když $\lambda = 0$ je vodiči bez užitku přenášena energie ze zdroje do zátěže a zpět. Účinník se po vynásobení 100 udává v %.

Při připojování spotřebičů k elektrovodné síti má zdroj (síťová zásuvka) zanedbatelnou reaktanční složku výstupní impedance. Navíc výkonové přizpůsobení nemá praktický význam, protože výkon na spotřebiči je vždy v poměru k výkonu na vnitřní impedanci zdroje výrazně větší. Nicméně je zbytečné, aby síťovým přívodem protékal proud nesoucí jalový výkon. Řešení spočívá v tom, že na konec vedení (ke spotřebiči) připojíme obvod s impedancí, která zabezpečí minimalizaci fázového posunu mezi napětím a proudem ve vedení od zdroje. Jde o opatření označované jako kompenzace účinníku.

Výkon v obvodu s reaktancí



$$\varphi = -16^\circ \quad I_m = 96 \text{ [mA]} \quad U_m = 10 \text{ [V]}$$



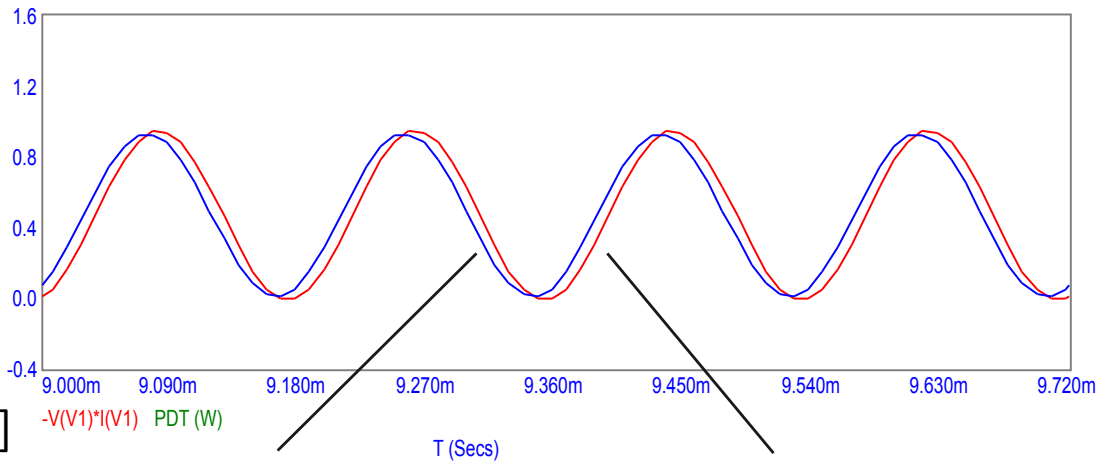
$$\omega = 1745 \text{ [rad/s]}$$

$$\hat{Z} = 100 - j.28,648 \text{ [\Omega]}$$

$$\hat{I} = 0.0924 + j.0,0265 \text{ [A]}$$

$$\hat{U} = 10 \text{ [V]}$$

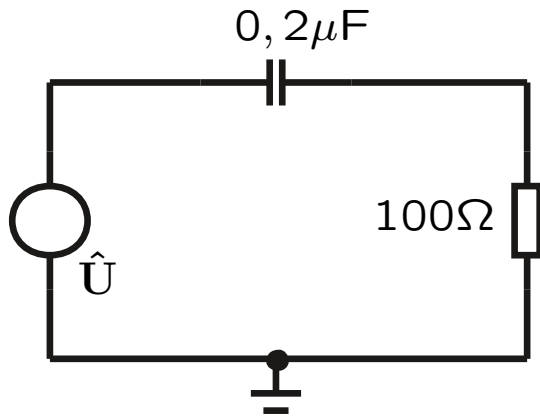
$$\hat{S} = 0,4621 - j.0,1324 \text{ [VA]}$$



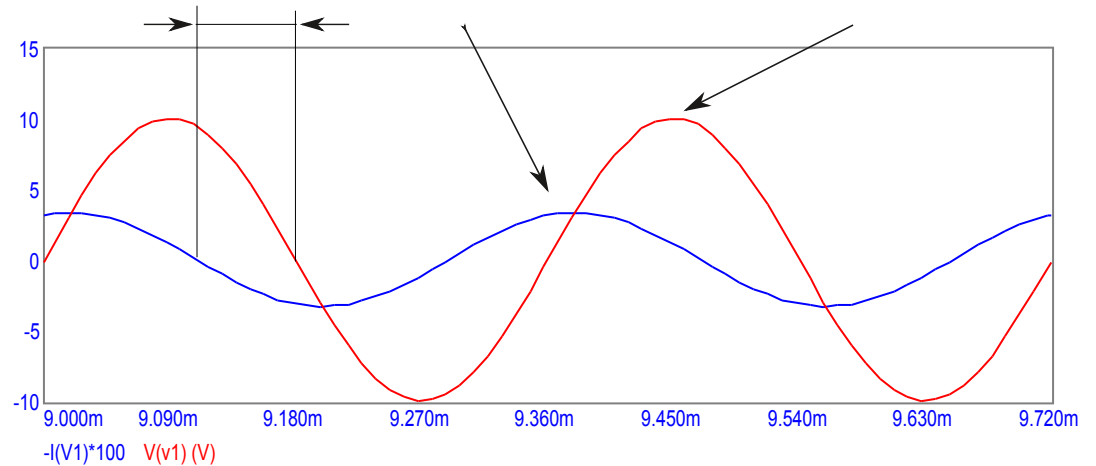
$$P = 0,4621 \text{ [W]}$$

$$S = 0,48 \text{ [VA]}$$

Výkon v obvodu s reaktancí



$$\varphi = -70,8^\circ \quad I_m = 33 \text{ [mA]} \quad U_m = 10 \text{ [V]}$$



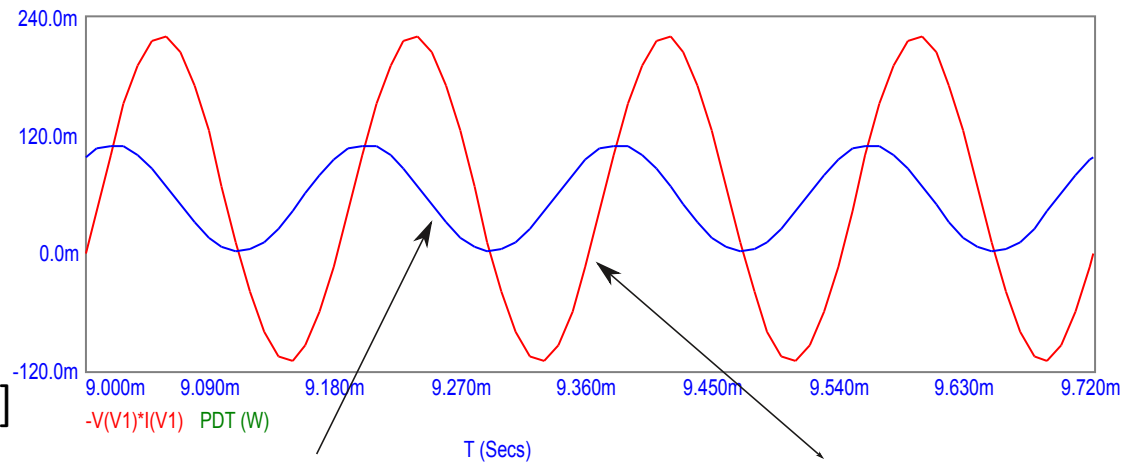
$$\omega = 1745 \text{ [rad/s]}$$

$$\hat{Z} = 100 - j.286,48 \text{ [\Omega]}$$

$$\hat{I} = 0.0109 + j.0,0311 \text{ [A]}$$

$$\hat{U} = 10 \text{ [V]}$$

$$\hat{S} = 0,0543 - j.0.1556 \text{ [VA]}$$



$$P = 0,0543 \text{ [W]}$$

$$S = 0,165 \text{ [VA]}$$

Frekvenční charakteristiky

Výpočty obvodů vždy směřují k nalezení vlastností obvodových veličin (napětí v uzlech, proudů ve smyčkách), když je obvod buzen nějakým zdrojem napětí nebo proudu. Použití Kirchhoffových zákonů tak vede ke vztahu, který má obecně tvar

$$\hat{Y}_2 = \hat{H}\hat{Y}_1,$$

kde \hat{Y}_2 je hledaný fázor některé obvodové veličiny, \hat{Y}_1 je fázor zdroje a \hat{H} je funkce popisující účinek zdroje na zvolenou obvodovou veličinu. (Analogicky jsme v nesetrvačných obvodech popsali napětí nebo proud v kterémkoli místě obvodu, pokud jsme znali budící proud nebo napětí).

Takové vyjádření platí v prostoru fázorů, lze však snadno získat popis časového průběhu:

$$y_1(t) = Y_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{a} \quad y_2(t) = Y_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

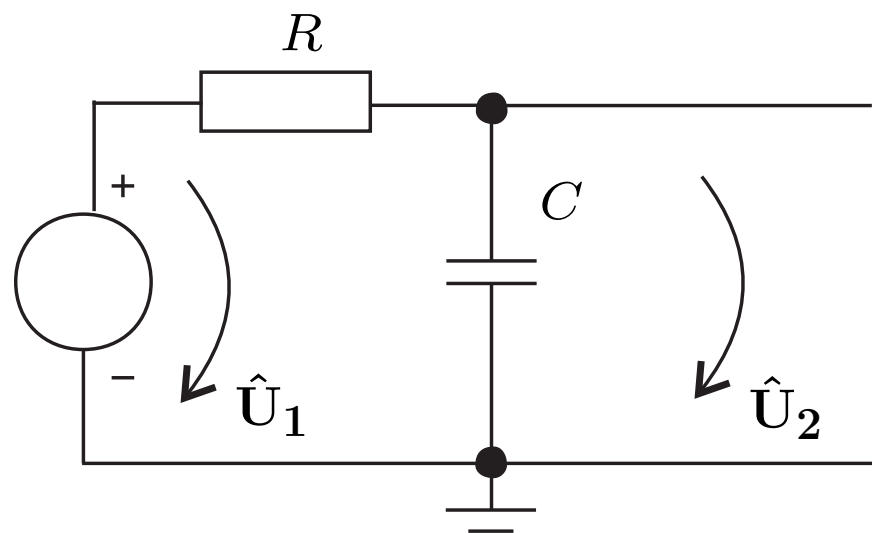
kde

$$Y_{2m} = Y_{1m} |\hat{\mathbf{H}}| = Y_{1m} \sqrt{(\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{H}}))^2 + (\operatorname{Im}(\hat{\mathbf{H}}))^2}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(\hat{\mathbf{H}})}{\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{H}})} \right).$$

Svět tučných symbolů se stříškami – fázorový, je jiný svět než svět časových průběhů $u(t)$ a $i(t)$ a jim odpovídajících derivací a integrálů. My však víme, že se dá jedno z druhého vypočítat, ale do jedné rovnice nikdy tyto různé symboly nenapíšeme.

Integrační RC obvod ve frekvenční oblasti



Uvedli jsme, že s impedancemi pracujeme jako s odpory. Takže využijeme znalostí o děliči napětí a napíšeme

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{\hat{Z}_C}{R + \hat{Z}_C} = \hat{U}_1 \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \hat{U}_1 \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Z uvedeného obecného vztahu můžeme užít zápisu

$$\hat{H} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Protože se jedná o matematické vyjádření poměru fázoru výstupního napětí k fázoru vstupního napětí, tedy o popis jak se vstupní napětí obvodem ovlivní, je-li přeneseno na výstup, nazývá se \hat{H} (napěťovým) přenosem obvodu. Jde o bezrozměrnou komplexní funkci kmitočtu ω , což bývá někdy vyjádřeno zápisem

$$\hat{H} \equiv H(j\omega).$$

Při úpravách uváděných vztahů se ukazuje součin RC jako parametr významný pro chování RC obvodu ve frekvenční oblasti. Snadno se přesvědčíme, že má rozměr času v sekundách. V součinu s kmitočtem (převrácená hodnota času) dává v našich výpočtech bezrozměrné funkční hodnoty pro dané frekvence.

Součin $RC = \tau$ se označuje jako časová konstanta.

Přenosové vlastnosti obvodů ve frekvenční oblasti popisujeme pomocí analýzy funkce \hat{H} . Ukážeme to na uvedeném integračním obvodu.

První významná informace se týká vlivu obvodu na amplitudu vstupního napětí.

Uvedli jsme, že $U_{2m} = U_{1m}|\hat{H}|$, takže

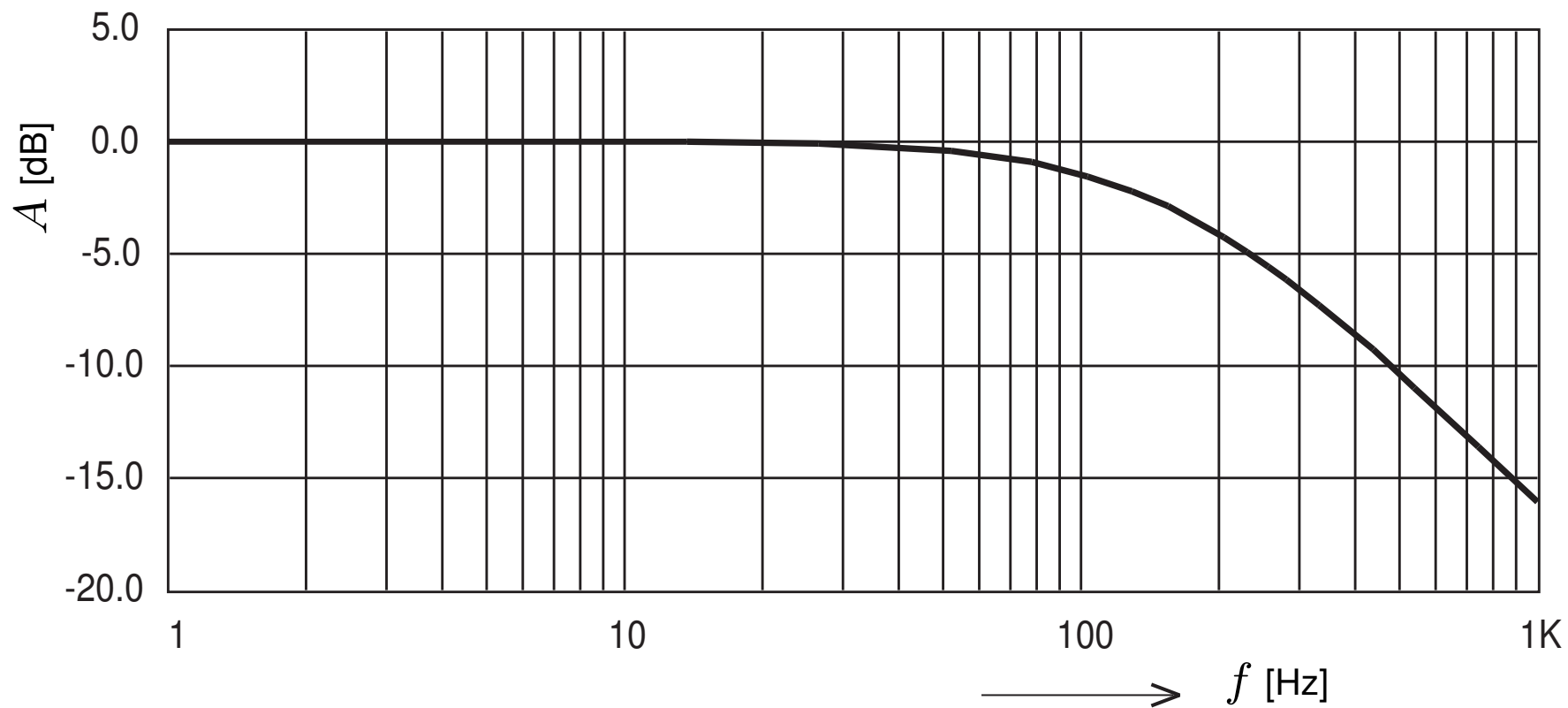
$$U_{2m} = U_{1m} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Vidíme, že amplituda sinusového průběhu je závislá na kmitočtu a s rostoucím kmitočtem bude klesat. Je zvykem tuto závislost zobrazit v grafu funkce $|\hat{H}|$, ve kterém nezávisle proměnnou (vodorovná osa) je logaritmus kmitočtu a na svislé ose je v logaritmickém měřítku A .

$$A = 20 \log|\hat{H}|.$$

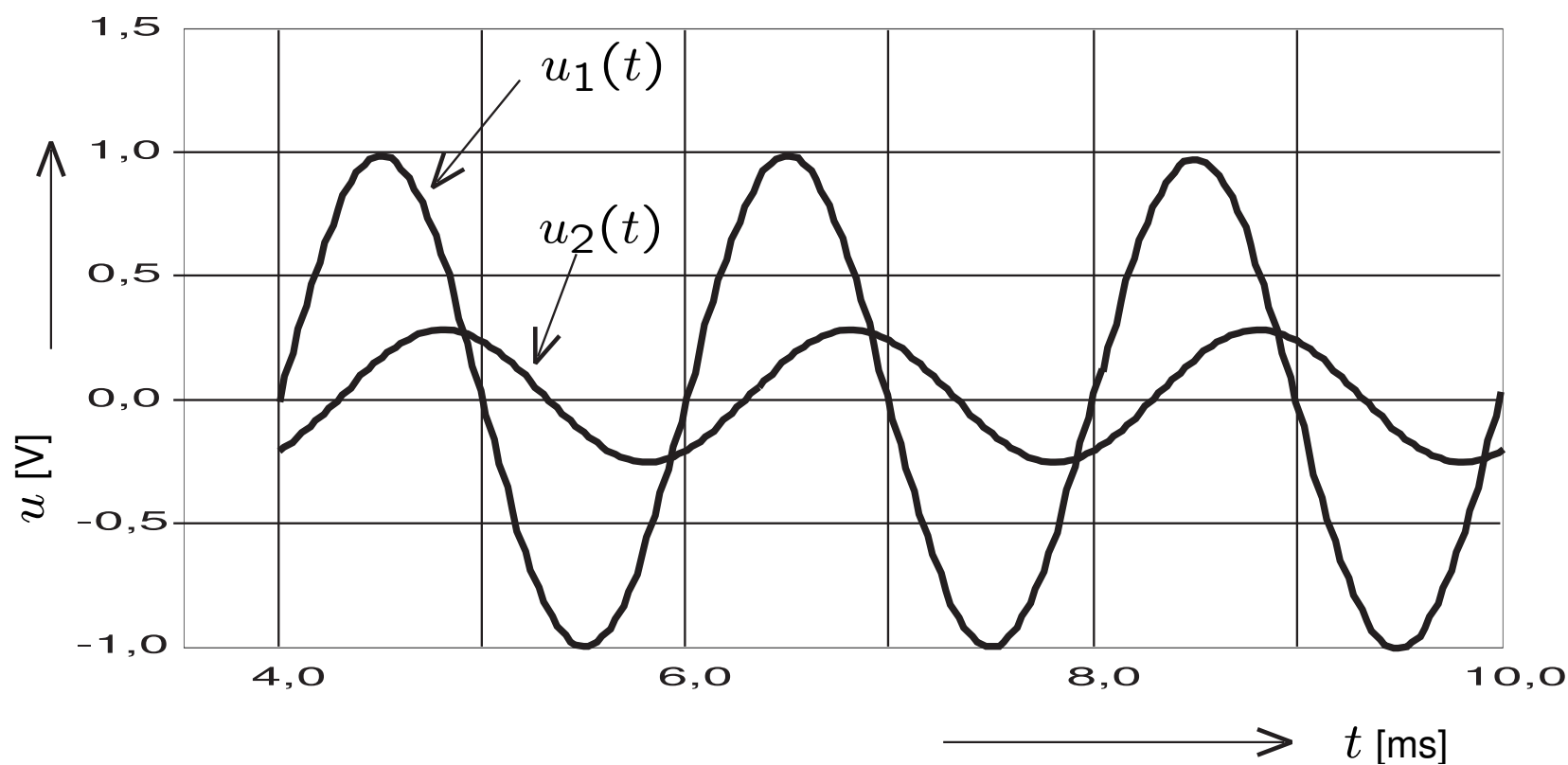
Pro její hodnoty jsou zavedeny decibely [dB], graf se označuje jako Bodeho charakteristika (viz Teorie systémů)

Na obrázku je Bodeho charakteristika integračního obvodu. Parametry obvodu byly zvoleny takto: $R = 100\text{ k}\Omega$ a $C = 10\text{ nF}$.

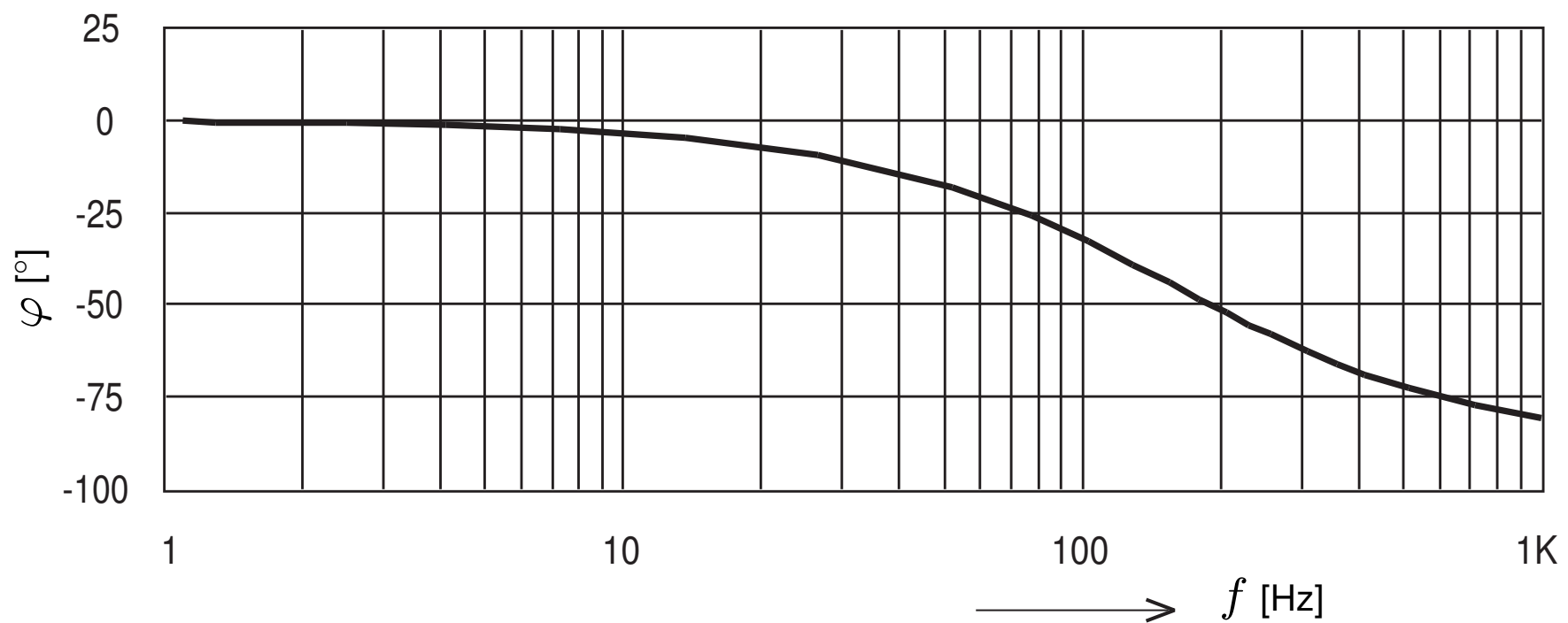


Pro integrační obvod zjistíme, že výstupní napětí se opožďuje za napětím vstupním. Z výrazu pro přenos plyne při nulové fázi na zdroji signálu $\varphi_1 = 0$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(\hat{\mathbf{H}})}{\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{H}})} \right) = -\operatorname{arctg}(\omega RC).$$



Fázová frekvenční charakteristika integračního RC obvodu



Amplitudová frekvenční charakteristika: $|\hat{\mathbf{H}}| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$

- $\omega \rightarrow 0$. Pro nízké kmitočty ($\omega\tau \ll 1$) se přenos obvodu blíží k jedničce. Pomalé změny okamžité hodnoty střídavého napětí vedou k tomu, že se kondenzátor nabíjí a vybíjí malými okamžitými hodnotami proudu a na rezistoru se vytváří malý úbytek napětí. Napětí na kapacitoru stíhá sledovat vstupní napětí. V grafu přenosové charakteristiky se její průběh asymptoticky blíží k vodorovné přímce odpovídající hodnotě 0 dB
- $\omega \rightarrow \infty$. Pro vysoké kmitočty ($\omega\tau \gg 1$) klesá přenos obvodu s rostoucím kmitočtem $|\hat{\mathbf{H}}| \approx 1/\omega\tau$. V této oblasti kmitočtů lze pro přenosovou charakteristiku v decibelech napsat $A = -20\log(2\pi f\tau)$, což znamená, že každé zvýšení kmitočtu na desetinásobek vede k poklesu přenosu o 20 dB. Je-li v grafu i kmitočty zobrazeny logaritmicky, blíží se průběh charakteristiky asymptoticky k přímce se sklonem -20 dB na dekádu kmitočtu

- uvedené dvě asymptoty se protnou na ose kmitočtu v bodě

$$\omega\tau = 1 \text{ resp. } \omega = 2\pi f = \frac{1}{\tau}.$$

Tomuto kmitočtu se říká **mezní kmitočet** a skutečný průběh charakteristiky se na něm nejvíce vzdaluje od asymptot. Dosazením zjistíme, že na mezním kmitočtu je

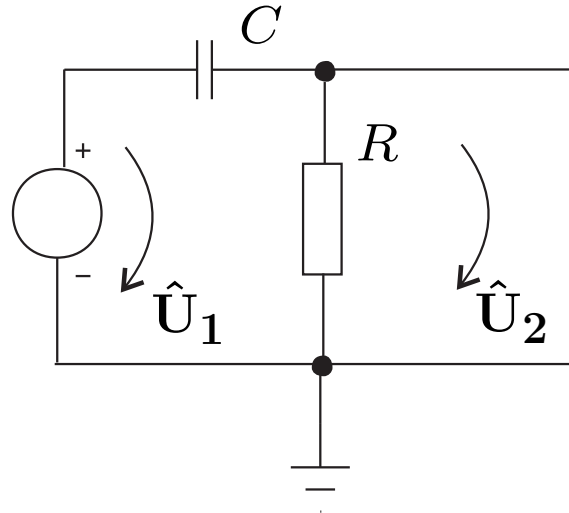
$$|\hat{\mathbf{H}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707, \text{ resp. } A \approx -3 \text{ dB.}$$

Mezní kmitočet je v tomto případě kmitočtem, na kterém se při rostoucím kmitočtu začne významně zmenšovat amplituda přenášeného signálu. Bývá označován jako horní mezní kmitočet f_h resp. ω_h a časová konstanta se také označí jako ta konstanta, která určuje horní mezní kmitočet τ_h

Fázová frekvenční charakteristika: $\varphi = -\arctg(\omega\tau)$

- $\omega \rightarrow 0$. Pro nízké kmitočty ($\omega\tau \ll 1$) se fáze přenosu obvodu blíží k nule. Již jsme uvedli, že napětí na kapacitoru stíhá sledovat vstupní napětí. V grafu přenosové charakteristiky se průběh fáze asymptoticky blíží k vodorovné přímce s hodnotou $\varphi = 0^\circ$.
- $\omega \rightarrow \infty$. Pro vysoké kmitočty ($\omega\tau \gg 1$) klesá přenos obvodu proto, že pomalý kapacitor nestačí reagovat na rychlé změny okamžité hodnoty vstupního napětí. Protože jde o harmonický ustálený stav, je napětí na kapacitoru sinusové, ale pomalost s jakou kapacitor dovoluje měnit na svých svorkách napětí způsobí, že se fáze zpožďuje. Pro rostoucí kmitočty se asymptoticky blíží k -90° resp. $-\pi/2$.
- Dosazením do výše uvedeného vztahu zjistíme, že na mezním kmitočtu je $\varphi = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg(1) = -45^\circ = -\pi/4$.

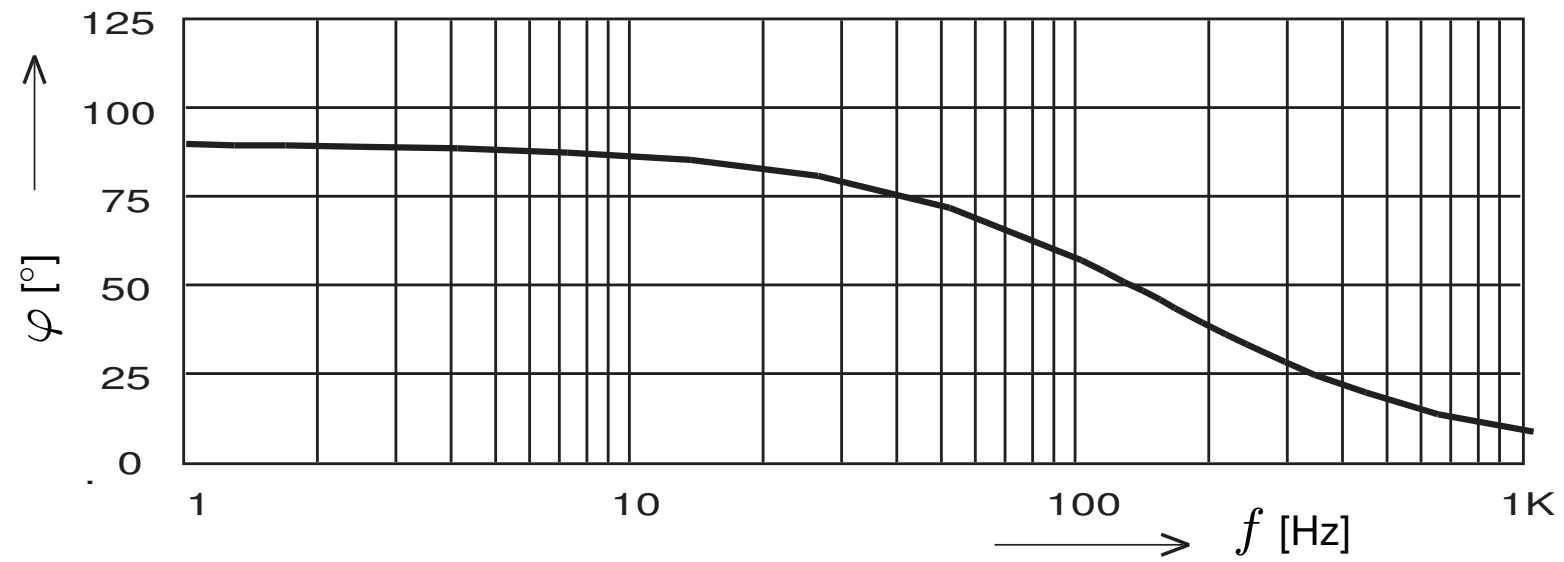
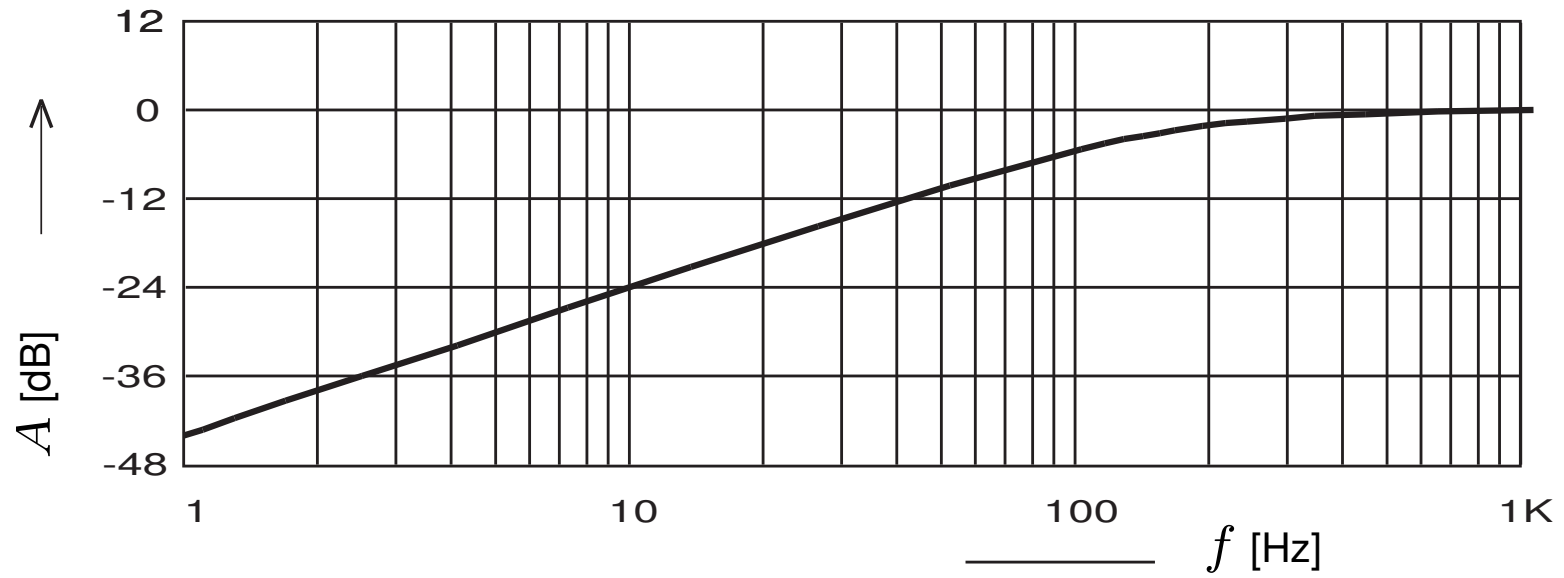
Derivační RC obvod ve frekvenční oblasti



$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{R}{R + \hat{Z}_C} = \hat{U}_1 \frac{R}{R + 1/j\omega C}$$

$$\hat{H} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$|\hat{H}| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$



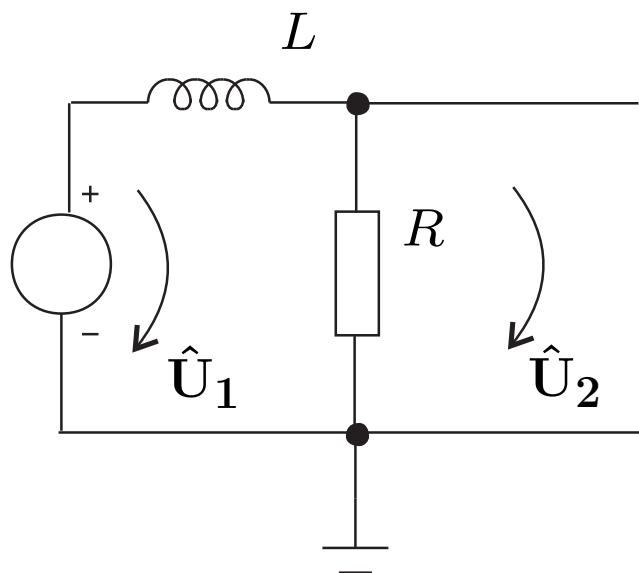
Derivační obvod ve frekvenční oblasti má následující asymptotické vlastnosti:

- $\omega \rightarrow 0$. Směrem k nízkým kmitočtům ($\omega\tau \ll 1$) absolutní hodnota přenosu klesá. Asymptota má sklon +20 dB na dekádu kmitočtu a fáze přenosu obvodu se blíží k $+90^\circ$, tedy výstupní napětí předbíhá napětí vstupní.
- $\omega \rightarrow \infty$. Pro vysoké kmitočty ($\omega\tau \gg 1$) se absolutní hodnota přenosu obvodu asymptoticky blíží k jedničce a fáze k nule.
- Na dolním mezním kmitočtu f_d ($\tau_d = 1/\omega_d$) je

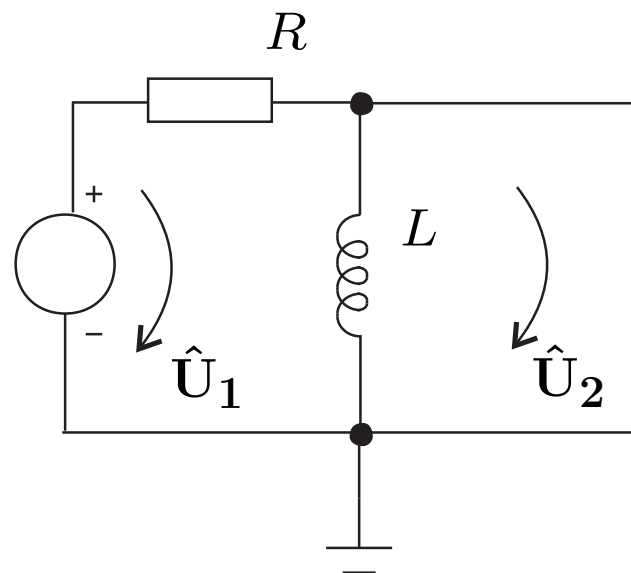
$$|\hat{\mathbf{H}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707, \text{ resp. } A \approx -3 \text{ dB.}$$

$$\varphi = \text{arctg}(1/\omega\tau) = \text{arctg}(1) = 45^\circ = \pi/4.$$

Obvody RL



integrační obvod



derivační obvod

$$\text{integrační } H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}, \quad \text{derivační } H(j\omega) = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}.$$

- Popis obvodu v harmonickém ustáleném stavu je prakticky významný proto, že reprezentuje vlastnosti obvodu pro širokou oblast použití.
- Matematický aparát pracuje s komplexními impedancemi a fázory tak, že formulace popisu obvodů je velmi jednoduchá, avšak omezená jen na harmonický ustálený stav – vylučuje výpočet přechodných dějů a popis činnosti obvodu s neharmonickým signálem. Výrazy s fázory (impedance, přenosy a obrazy signálu) nemohou vystupovat ve vztazích pro časové průběhy signálů.
- Matematický popis obvodu dovoluje formulovat komplexní funkci kmitočtu označovanou jako přenosová funkce (přenos) obvodu. Z ní lze odvodit amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku obvodu. Amplitudová charakteristika je většinou zobrazována v logaritmických souřadnicích na obou osách (x - logaritmus frekvence, y - logaritmus absolutní hodnoty přenosu v deci-belech [dB]) a fázová charakteristika s logaritmem frekvence a lineární stupnicí fázového úhlu.

- V kvalitativním odhadu vlastností obvodů s kapacitami a induktory lze na dostatečně vysokých kmitočtech považovat kapacitor za zkrat a induktor za rozpojený obvod. Na dostatečně nízkých kmitočtech lze kapacitor považovat za rozpojený obvod a induktor za zkrat.