Fakulta biomedicínského inženýrství – Teoretická elektrotechnika

Prof. Ing. Jan Uhlíř, CSc.

Léto 2020

4. Výpočty v časové oblasti

Laplaceova transformace – aplikace v analýze elektrických obvodů

Obvodové rovnice s integrálním nebo diferenciálním popisem vztahů mezi obvodovými veličinami

Přechodné děje — napětí (proud) v obvodu se skokem budicí veličiny

Laplaceova transformace ve výpočtech elektrických obvodů

Definice Laplaceova obrazu pro časovou funkci $f(t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \quad s = \sigma + j\omega$$

Definice zpětné Laplaceovy transformace pro obraz $F(s)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}s$$

Praktické použití Laplaceovy transformace je založeno na slovnících, ve kterých jsou k dispozici užitečné dvojice „předmět – obraz“

Pro přímou a inverzní Laplaceovu transformaci je možno používat také matematický software

Vlastnosti Laplaceovy transformace – operace

- Linearita

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(p)$$

- Posunutí v čase

$$f(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad F(p)\mathrm{e}^{-pt_0}$$

- Obraz derivace

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad pF(p) - f(0_+)$$

- Obraz integrálu

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{p}F(p)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace – signály

- Jednotkový impuls

$$\delta(t) \iff 1$$

- Jednotkový skok

$$1(t) \iff \frac{1}{p}$$

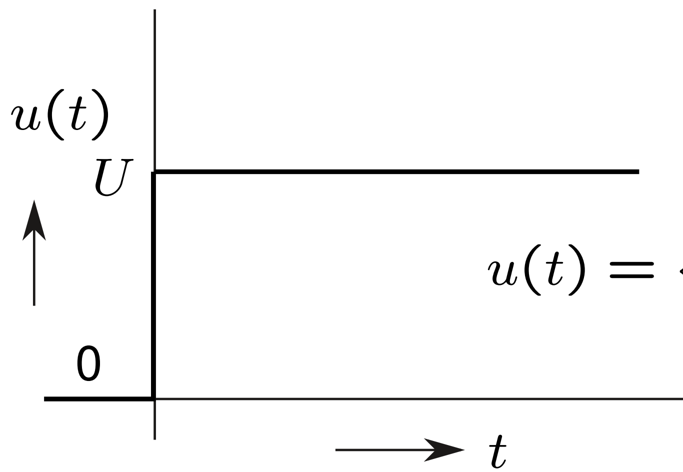
- Sinusový signál, kosinusový signál (viz derivace)

$$1(t)\sin(\omega t) \iff \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad 1(t)\cos(\omega t) \iff \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

- Exponenciální impuls

$$1(t)\mathrm{e}^{-at} \iff \frac{1}{p+a}$$

Pro analýzu v časové oblasti nejčastěji použijeme impulsové signály.
Nejjednodušší z nich se nazývá napěťový (proudový) skok.

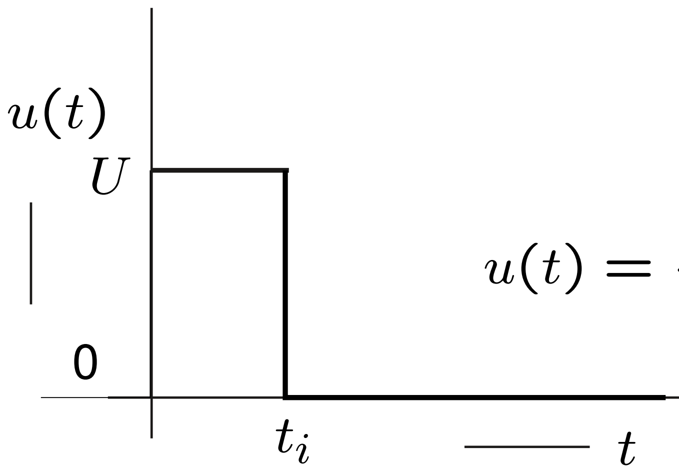


$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U, & t \geq 0 \end{cases}$$

Laplaceův obraz

$$U(p) = \frac{U}{p}$$

Další signál pro analýzu v časové oblasti označujeme jako osamělý impuls.

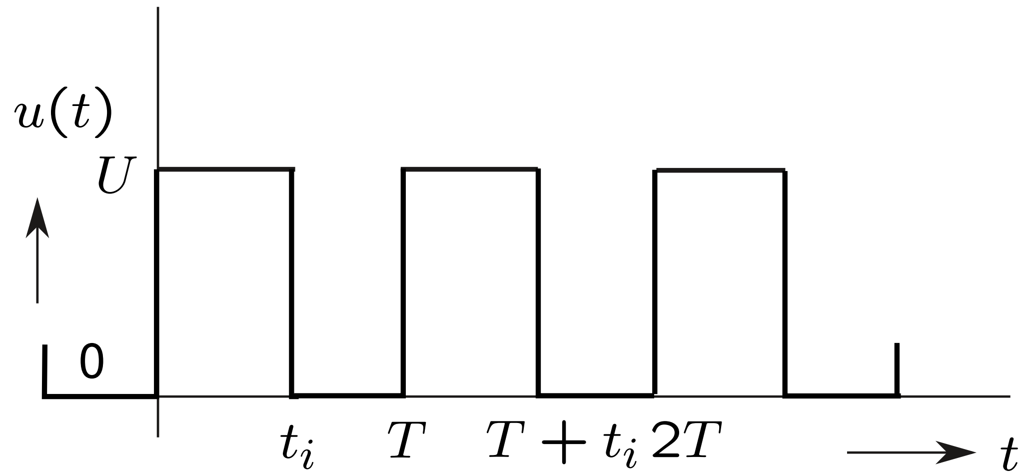


$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U, & t \geq 0 \\ 0, & t \geq t_i \end{cases}$$

Laplaceův obraz

$$U(p) = \frac{U}{p}(1 - \mathrm{e}^{-pt_i})$$

Periodický impulsní průběh



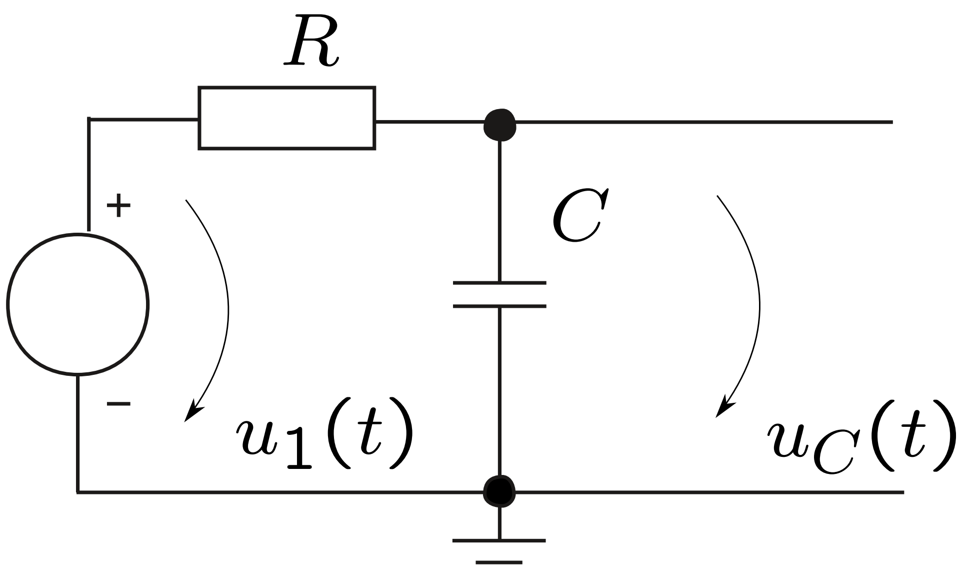
$$u(t) = \begin{cases} 0, & kT + t_i < t < (k+1)T \\ U, & kT \le t \le kT + t_i \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & kT + t_i < t < (k+1)T \\ U, & kT \le t \le kT + t_i \end{cases}$$

$k = \ldots., -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ střída (duty cycle) $d = \frac{t_i}{T - t_i}$

Laplaceův obraz $U(p) = \frac{U}{p} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-pt_i})}{(1 - \mathrm{e}^{-pT})}$

Obvod RC buzený skokem napětí – integrační obvod



.

V RC obvodu se bude kapacitor přes rezistor nabíjet. Počáteční napětí na kapacitoru v čase $t = 0$ nechť je $u_C(0)$.

V čase $t \to \infty$ půjde $u_C(t) \to U$. Nabíjecí proud klesne k nule tehdy, kdy se napětí na zdroji vyrovná s napětím na nabitém kapacitoru.

Pro proud v obvodu lze napsat rovnici

$$Ri(t) = U - u_C(t) = U - \left(\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u_C(0)\right)$$

K jejímu řešení použijeme Laplaceovy transformace.

Známe obraz skoku ($\frac{1}{p}$), obraz počáteční podmínky pro funkci ($f(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{p}f(0)$) a obraz integrálu funkce ($\int_0^t f(t)\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \frac{1}{p}F(p)$).

Pro Laplaceův obraz proudu $I(p)$ pak lze napsat

$$RI(p) = \frac{U}{p} - \left(\frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}\right)$$

a po úpravě

$$I(p) = \frac{U - u_C(0)}{R} \frac{1}{(p + \frac{1}{\tau})}, \quad \text{kde}\, \tau = RC$$

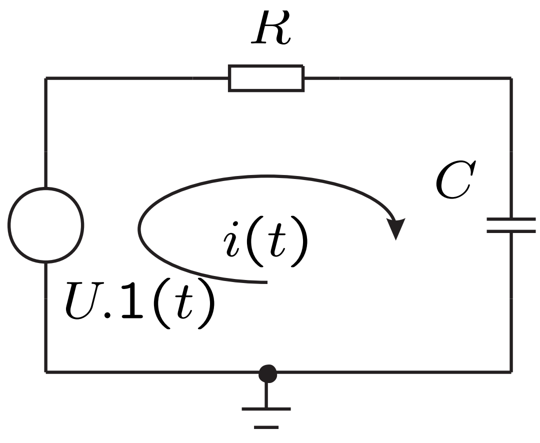
Ve slovníku Laplaceových obrazů nalezneme $\frac{1}{p+a} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-at}$

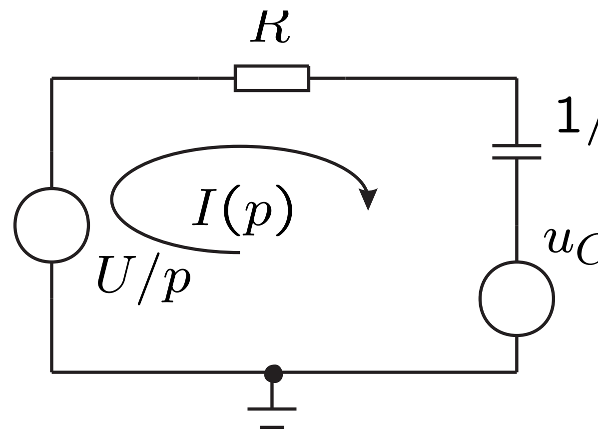
Řešení tedy popisuje časový průběh proudu pro $t \geq 0$

$$i(t) = \frac{U - u_C(0)}{R} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}}$$

$\tau = RC$ je časová konstanta a má rozměr v sekundách.

Pro obvod lze nakreslit jeho operátorový model a rovnici zapsat přímo z něj





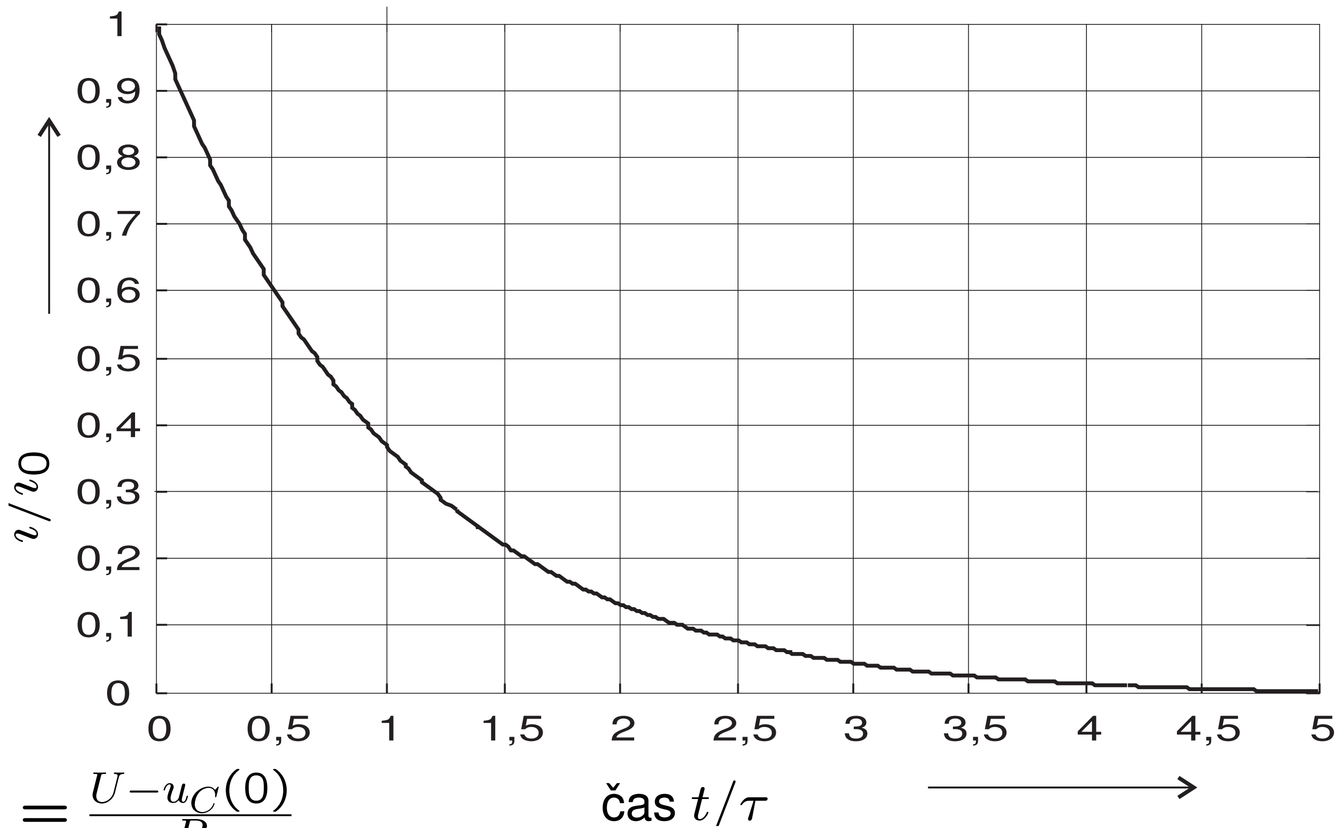
$$I(p) = \frac{\frac{U - u_C(0)}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U - u_C(0)}{R}\left(\frac{1}{p + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)} \Longleftrightarrow f(t) = \mathrm{e}^{-at}$$

$$i(t) = \frac{U - u_C(0)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}}, \qquad \text{kde} \quad \mathrm{a} = 1/\tau \quad \tau = \mathrm{RC}$$

.

Normalizovaný časový průběh proudu



$$i_0 = \frac{U - u_C(0)}{R}$$

Pro napětí $u_C(t)$ dostaneme

$$u_C(t) = U - (U - u_C(0))\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}} = \mathrm{U}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}}) + \mathrm{u_C}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}}$$

a pro $u_C(0) = 0$

$$u_C(t) = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}})$$

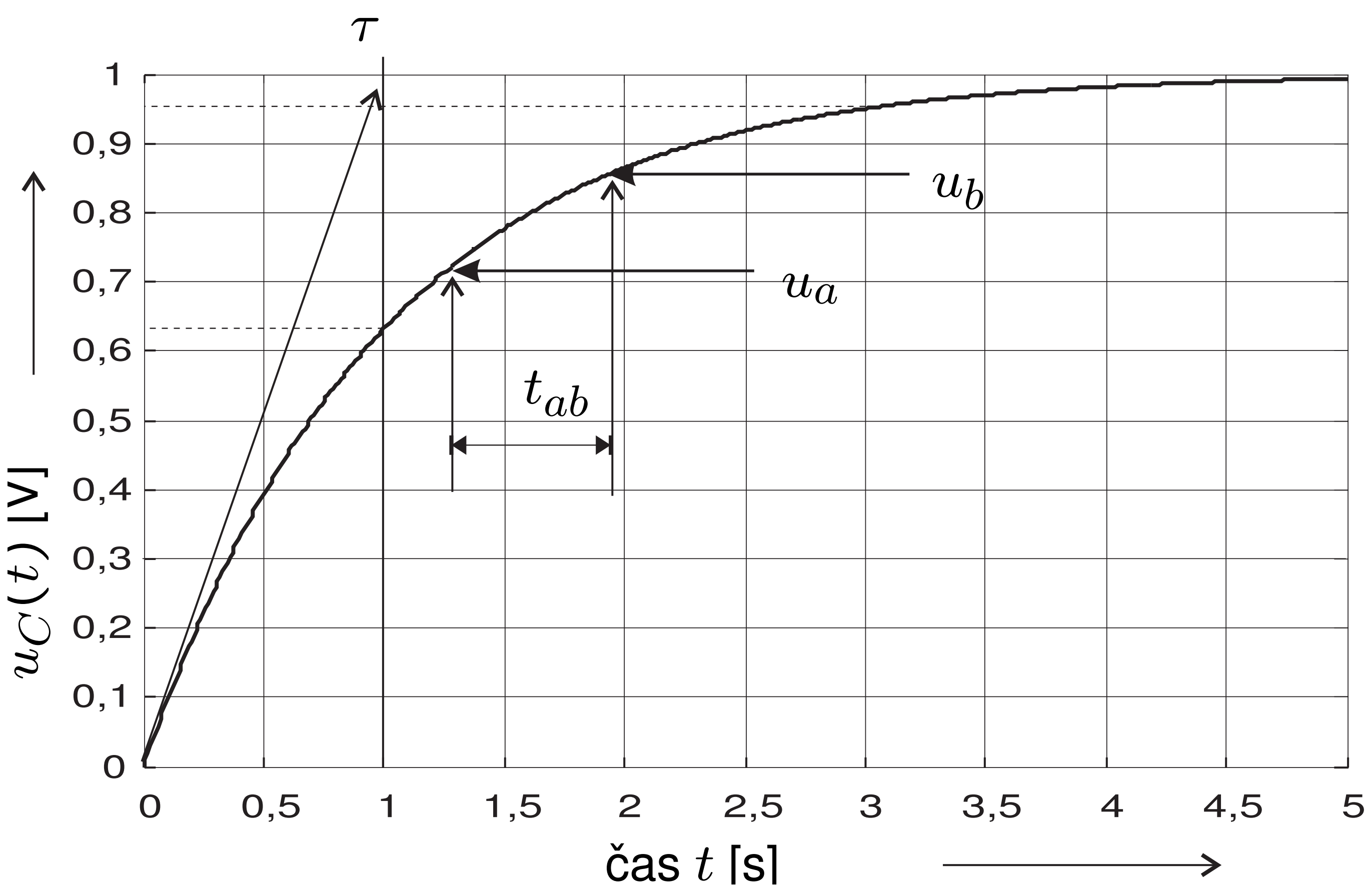
nebo Laplaceovou transformací

$$U_C(p) = \frac{U}{p} \cdot \frac{\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{U}{\tau} \cdot \frac{1}{p\,(p+\frac{1}{\tau})}$$

Slovník: $F(p) = \frac{1}{p\,(p+a)} \Longleftrightarrow f(t) = \frac{1}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)$

$$a = \frac{1}{\tau}, \qquad \mathrm{u}_C(t) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Grafický průběh nabíjení ukazuje obrázek, a to pro případ, že
$u_C(0) = 0,\ U = 1\,V$, $RC = \tau = 1$ s, např. $R = 100\,$kΩ a $C = 10\,\mu$F.



Z obrázku lze vyčíst některé vlastnosti napětí na kapacitoru:

- směrnice tečny exponenciály na počátku přechodného děje je rovna časové konstantě τ,
- po uplynutí doby $t = \tau$ dosáhne exponenciála přibližně 63% z ustálené hodnoty,
- po uplynutí času odpovídajícího třem časovým konstantám je napětí na kapacitoru větší než 95% ustálené hodnoty,
- po uplynutí času odpovídajícího pěti časovým konstantám je napětí na kapacitoru větší než 99% ustálené hodnoty,
- zvolíme-li na exponenciálním průběhu dvě libovolné úrovně napětí u_a a u_b, můžeme při známé velikosti ustálené hodnoty U vypočítat dobu t_{ab}, po které exponenciála bude probíhat mezi napětími u_a a u_b

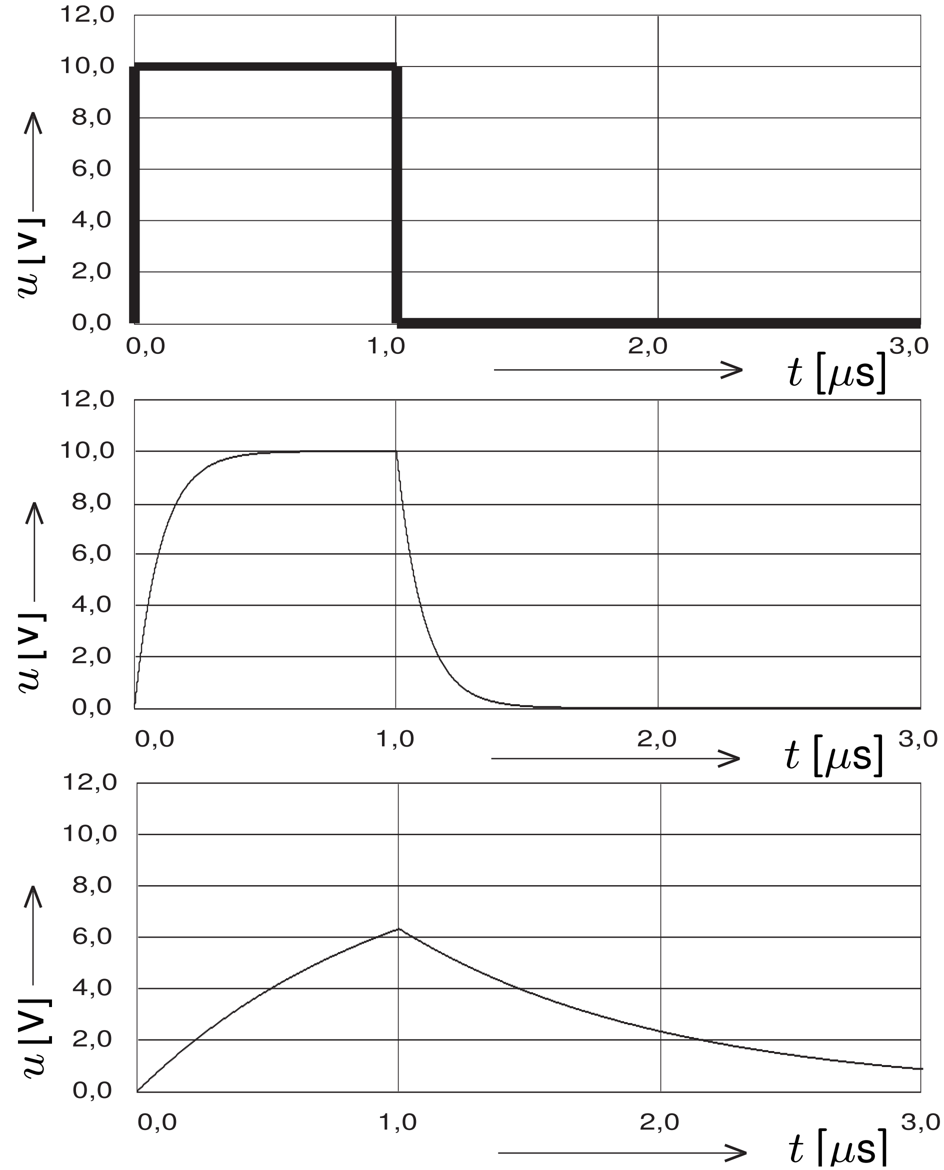
$$t_{ab} = \tau \ln \left(\frac{U - u_a}{U - u_b} \right) .$$

Nad výrazy pro napětí na kapacitoru a proud obvodem lze uvést následující praktické úvahy:

- přechodný děj lze urychlit jenom zmenšením časové konstanty $\tau = R.C$,
- zmenšení časové konstanty lze docílit zmenšením kapacity C, což v praxi nemusí být vždycky možné,
- zmenšení časové konstanty lze docílit zmenšením odporu R; to ale vede k většímu proudu $i(0) = U/R$, což nemusí snášet zdroj impulsního napětí.

Zkracování přechodných dějů v elektronických obvodech je vždy bojem s přírodou.

Nechť napětí $u_1(t) = U$ skokem přejde v čase t_i z hodnoty U na hodnotu $u_1(t_i) = 0$. Jedná se o buzení impulsem:



Pokud bylo $u_C(0) = 0$, vytvoří se v čase t_i počáteční podmínka pro následující přechodný děj

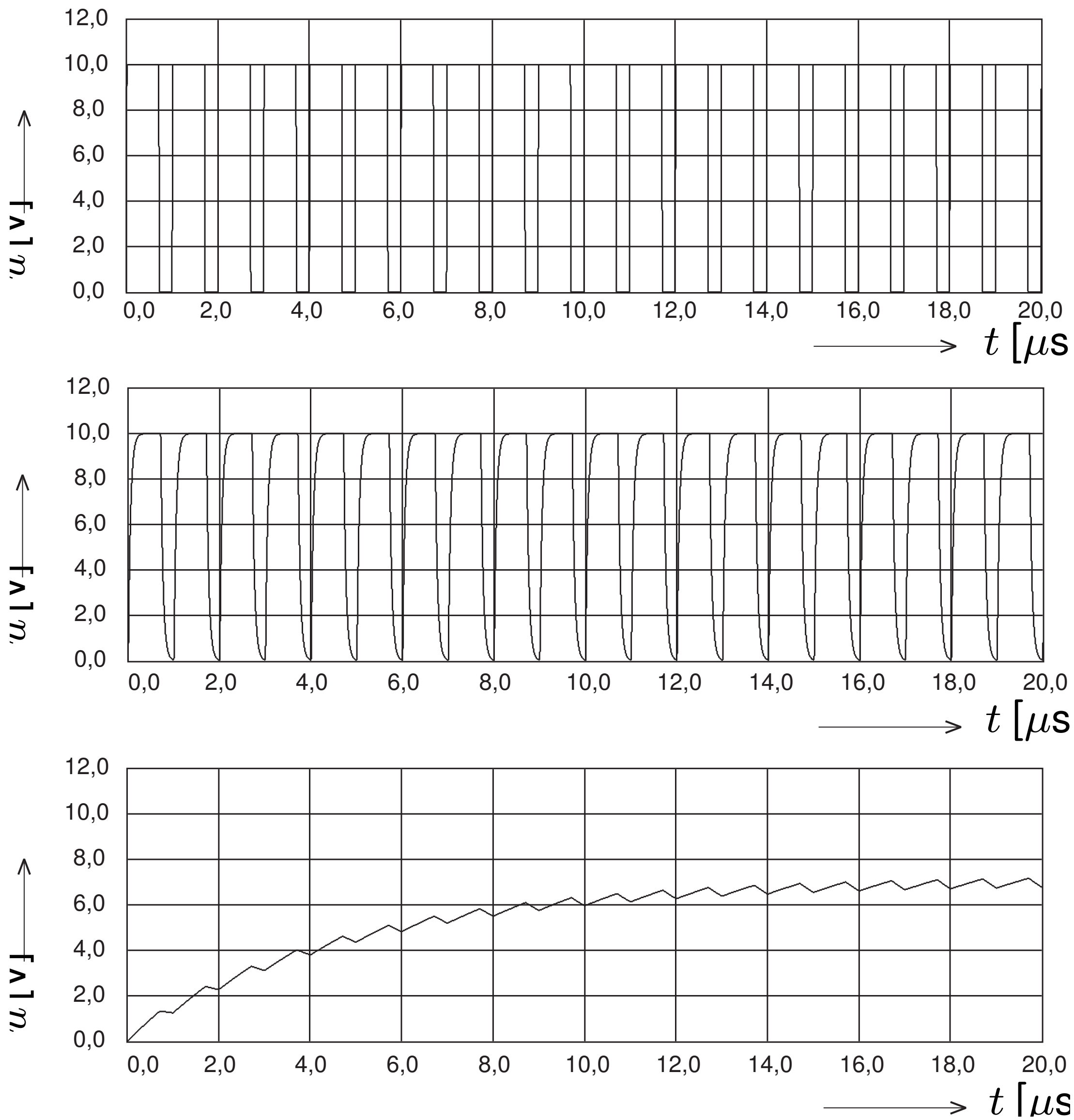
$$u_C(t_i) = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau}})$$

Pak z výrazu pro přechodný děj s počáteční podmínkou $u_C(t_i)$ a nulovým budicím napětím dostaneme

$$u_C(t) = 0 - [0 - u_C(t_i)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

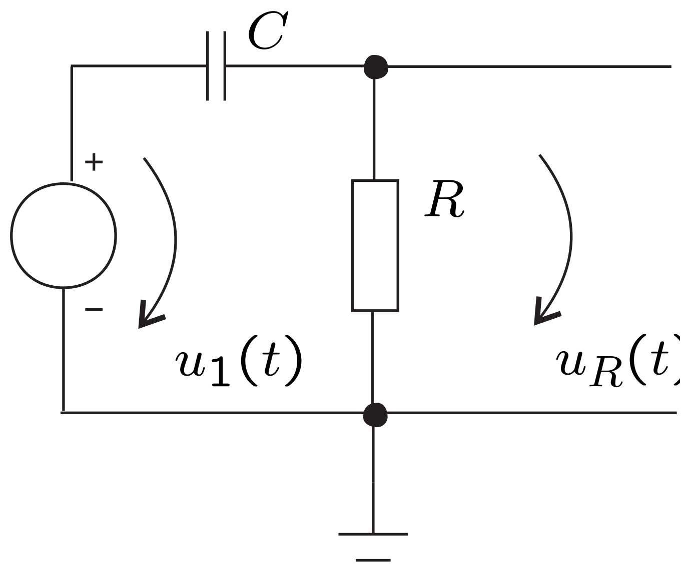
$$u_C(t) = u_C(t_i)\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

Buzení periodickými impulsy



Na prvém grafu výstupního signálu je časový průběh na výstupu z obvodu s časovou konstantou $\tau = 50$ ns (tedy 5 % z periody impulsního průběhu), na druhém grafu je časová konstanta obvodu nastavena na 5 μs (tedy pětinásobek periody). V tomto druhém případě se chování obvodu dá interpretovat jako integrace. Povšimněme si, že výstupní napětí obvodu na konci přechodného děje osciluje kolem hodnoty 7 V. To je hodnota integrálu z periody vstupního průběhu (10 V a 70 % periody). Napětí se „vlní“, ale pokud bychom časovou konstantu zvětšili, zvlnění by se zmenšilo, avšak ustálení na hodnotě integrálu by trvalo déle.

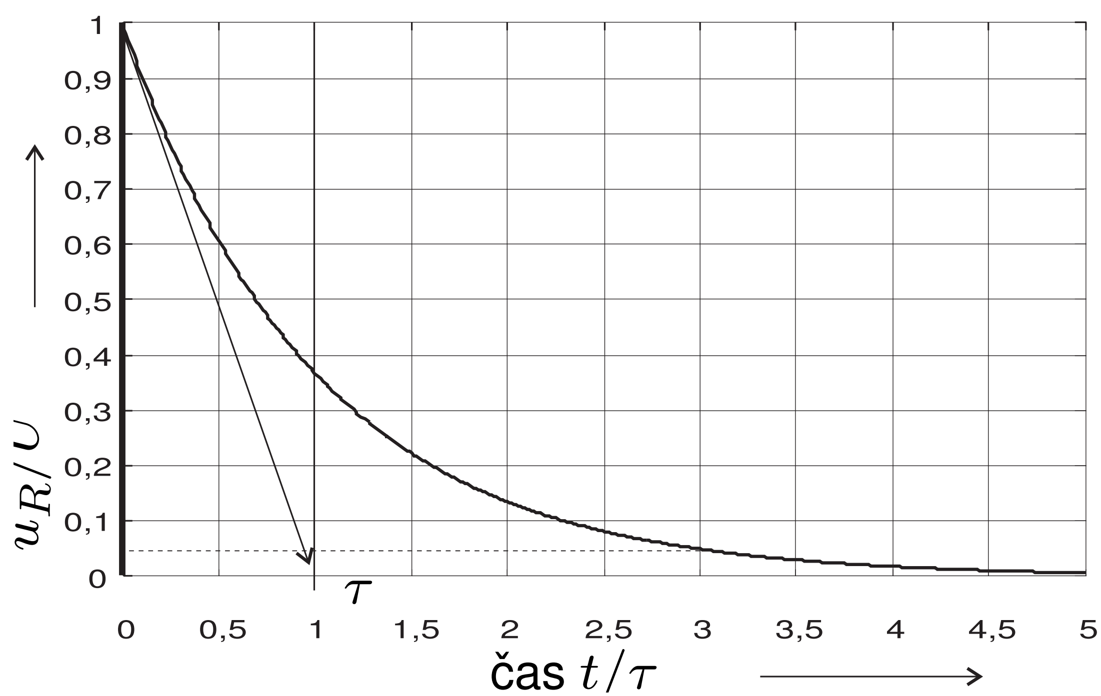
Obvod RC buzený skokem napětí – derivační obvod



Pokud $u_C(0) = 0$ je napětí na výstupu derivačního obvodu pro $t < 0$ rovno $u_R(0_-) = 0$. Pro $t \geq 0$ platí

$$u_R(t) = U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Normalizovaný průběh



Při buzení osamělým impulsem skočí vstupní impuls z hodnoty napětí $u_1(t) = U$ v čase t_i zpět na nulovou hodnotu. Pak bude

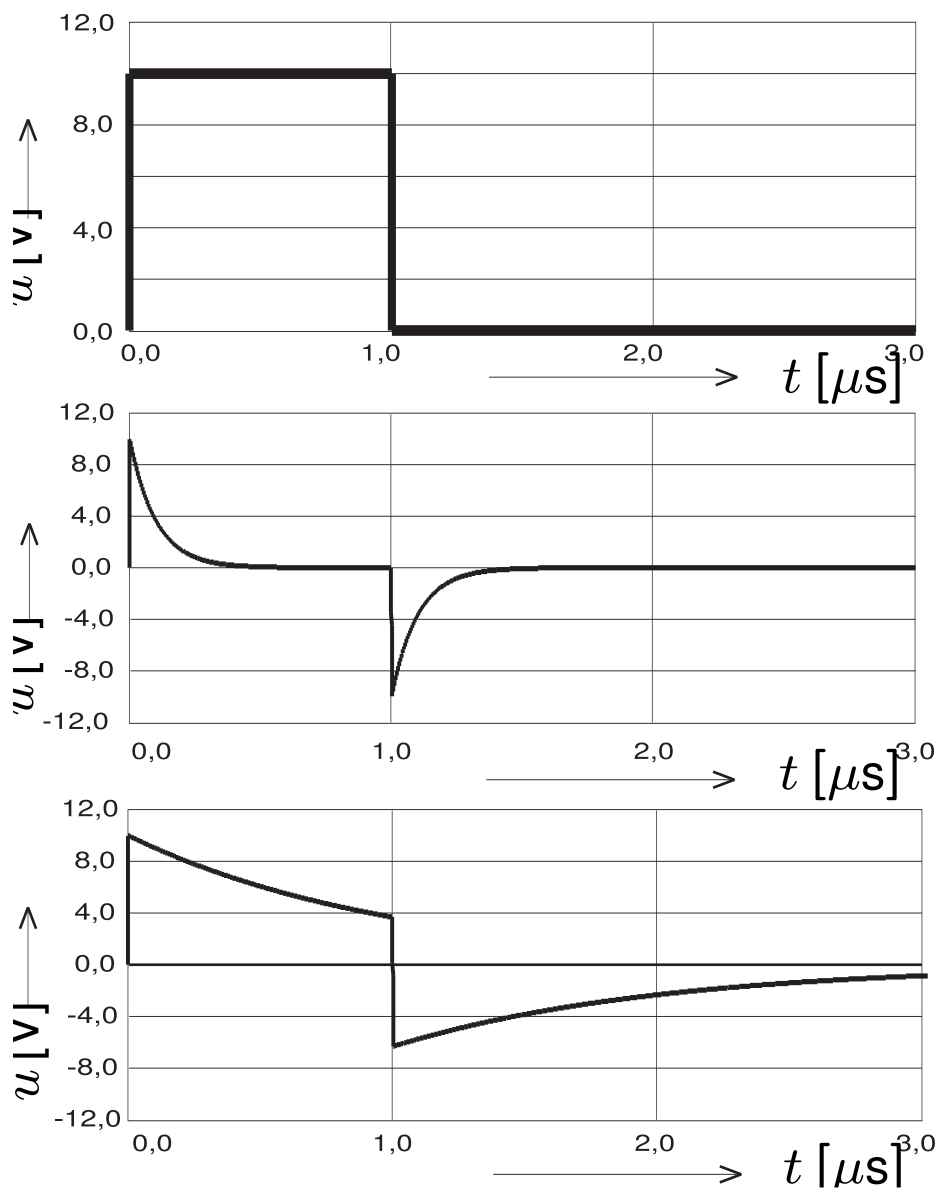
$$u_R(t) = (0 + u_C(t_i))\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}} = (u_R(t_i) - U)\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \qquad \text{pro} \quad t \geq t_i$$

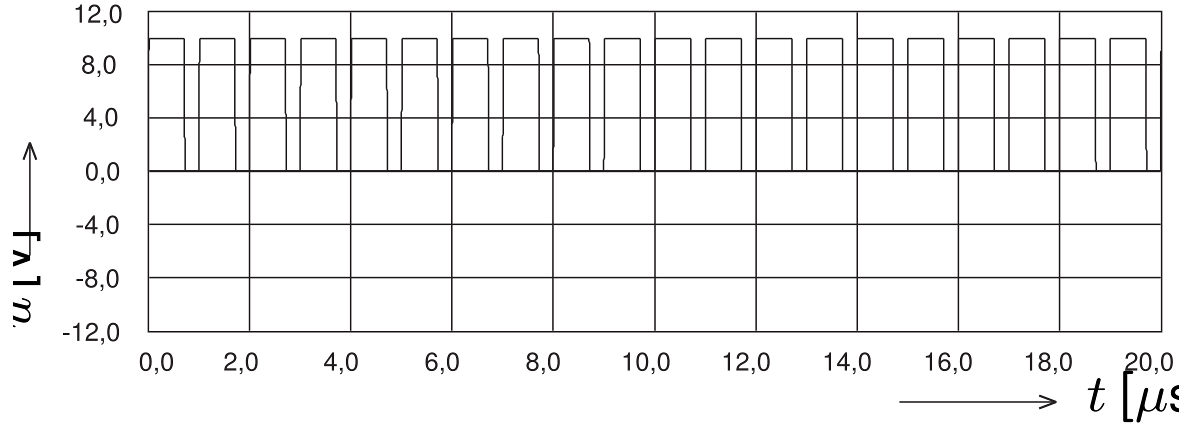
Pokud bylo před příchodem impulsu v čase $t = 0$ výstupní napětí nulové, bude

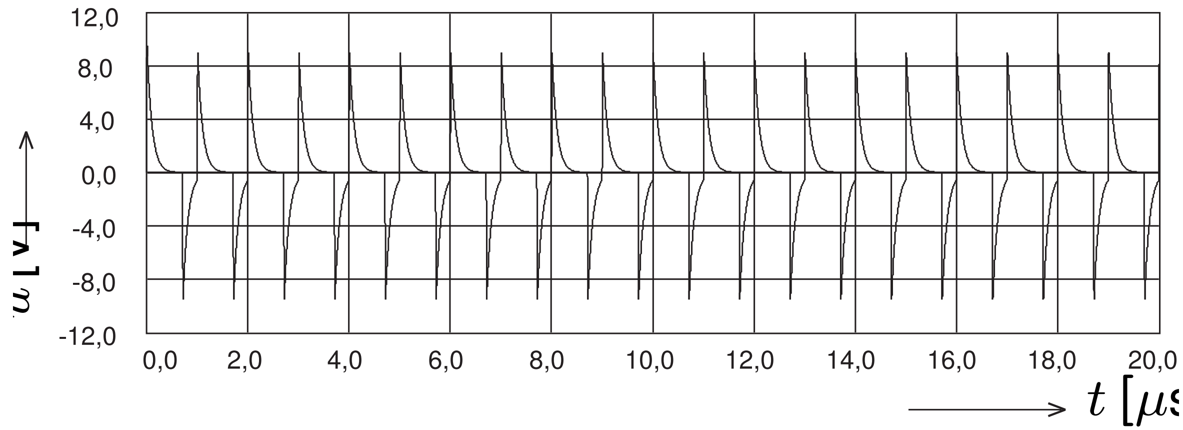
$$u_R(t_i) = U\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau}} \qquad u_R(t) = U\,(\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{\tau}} - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \qquad \text{pro} \quad t \geq t_i$$

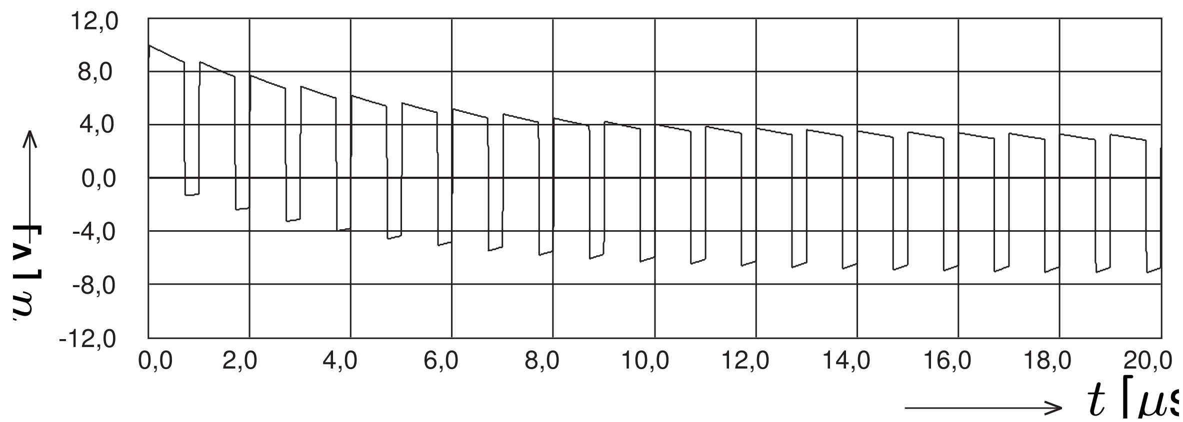
A pokud by přechodný děj v průběhu času $t_i \gg \tau$ skončil, tedy $u_R(t_i) \approx 0$, pak

$$u_R(t) = -U\,\mathrm{e}^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \qquad \text{pro} \quad t \geq t_i$$


12,0
8,0
4,0
0,0
u [V]
0,0
1,0
2,0
3,0
t [μs]
12,0
8,0
4,0
0,0
-4,0
-8,0
-12,0
u [V]
0,0
1,0
2,0
3,0
t [μs]
12,0
8,0
4,0
0,0
-4,0
-8,0
-12,0
u [V]
0,0
1,0
2,0
3,0
t [μs]


12,0
8,0
4,0
0,0
-4,0
-8,0
-12,0
0,0 2,0 4,0 6,0 8,0 10,0 12,0 14,0 16,0 18,0 20,0
t [μs

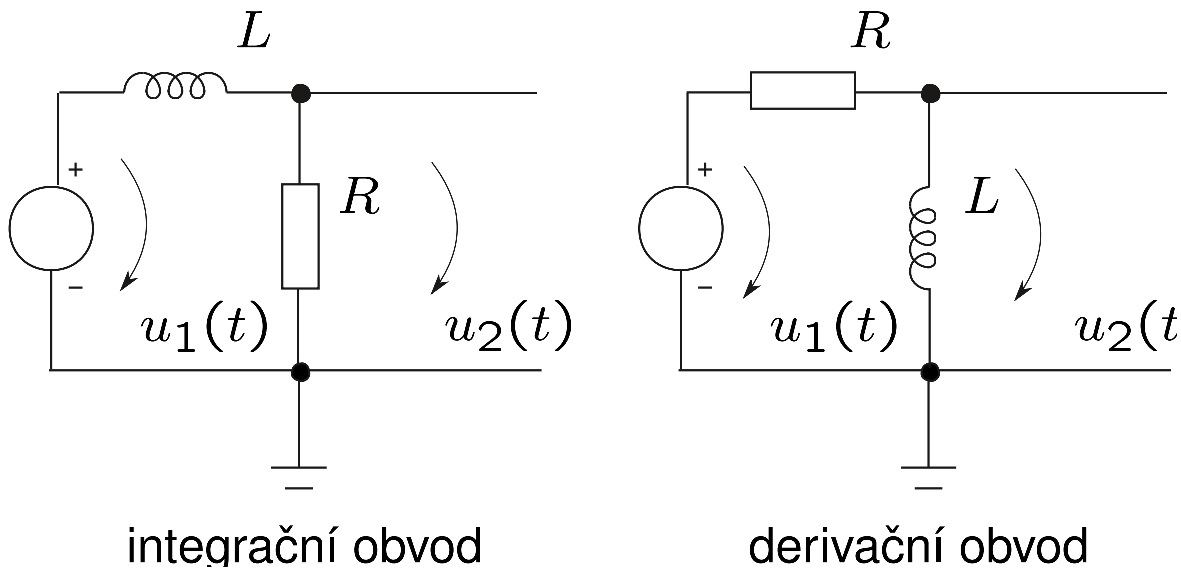

12,0
8,0
4,0
0,0
-4,0
-8,0
-12,0
0,0 2,0 4,0 6,0 8,0 10,0 12,0 14,0 16,0 18,0 20,0
t [μs


12,0
8,0
4,0
0,0
-4,0
-8,0
-12,0
0,0 2,0 4,0 6,0 8,0 10,0 12,0 14,0 16,0 18,0 20,0
t [μs

Na obrázku je naznačena situace analogická k příkladu buzení integračního obvodu periodickými impulsy. Nejprve je uveden příklad buzení obvodu impulsy s periodou 1 μs a střídou 0,7 (impuls):0,3 (mezera) s tím, že časová konstanta obvodu je 0,1 μs. V druhém případě je časová konstanta obvodu 5 μs.

V prvém případě lze přiznat obvodu roli obvodu derivačního, protože generuje jednotlivé impulsy, které svou polaritou a krátkostí trvání připomínají derivaci skoků (derivace ideálního skoku je nekonečně krátký impuls).

Články RL



Pro integrační i derivační článek složený z induktoru a rezistoru platí, při buzení skokem napětí nebo impulsy, identické vztahy jako pro články RC.

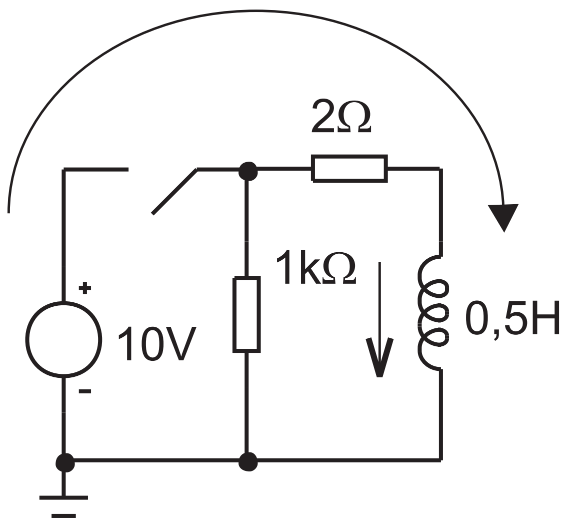
Časová konstanta je $\tau = \dfrac{L}{R}$.

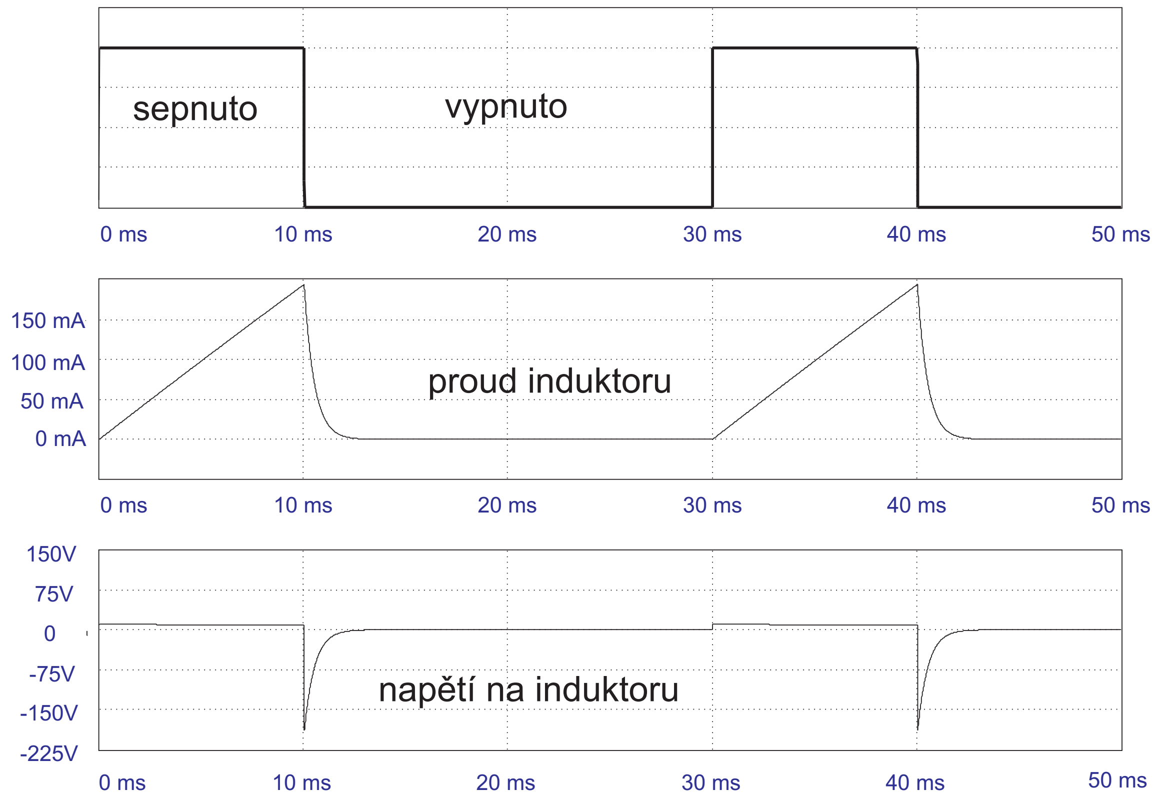
Obvod LR se spínačem

V obvodu s induktorem můžeme vytvořit situaci, kdy se na svorkách některých součástek může objevit napětí vyšší, než má kterýkoli zdroj napětí. To využíváme v tzv. spínaných zdrojích a regulátorech napájecích napětí.

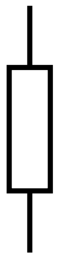
Princip takových obvodů je založen na skutečnosti, že induktor hromadí energii v magnetickém poli, které je vytvořeno procházejícím proudem. Proto má procházející proud setrvačné chování. Pokud spínač skokem změní odpor v obvodu, přechodný děj bude vycházet z počáteční podmínky, dané proudem před přepnutím. Platí tedy, je-li proud před sepnutím určen menším odporem než je odpor připojený po přepnutí, vznikne na svorkách připojeného rezistoru skok napětí s větším napětím, než má zdroj, který do induktoru proud zavedl.

Spínání induktivní zátěže



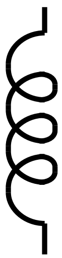


Obrazy vztahů mezi obvodovými veličinami na svorkách elementárních dvojpólů



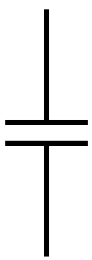
$$u_R(t) = R i_R(t) \quad \Rightarrow \quad U_R(p) = R I_R(p)$$

$$i_R(t) = G u_R(t) \quad \Rightarrow \quad I_R(p) = G U_R(p)$$



$$u_L(t) = L \frac{\mathrm{d} i_L(t)}{\mathrm{d} t} \Rightarrow \quad U_L(p) = pL I_L(p) - L i_L(0_+)$$

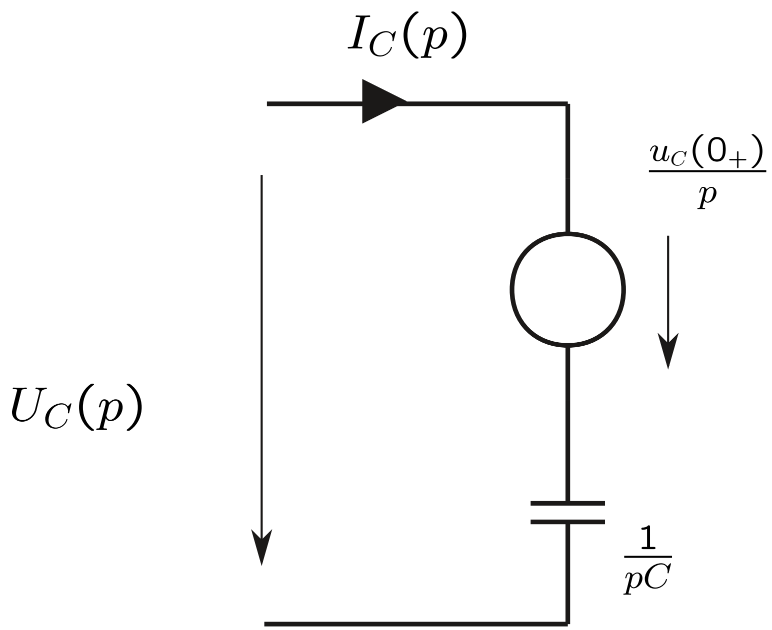
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) \mathrm{d}\tau + i_L(0_+) \Rightarrow \quad I_L(p) = \frac{1}{pL} U_L(p) + \frac{i_L(0_+)}{p}$$

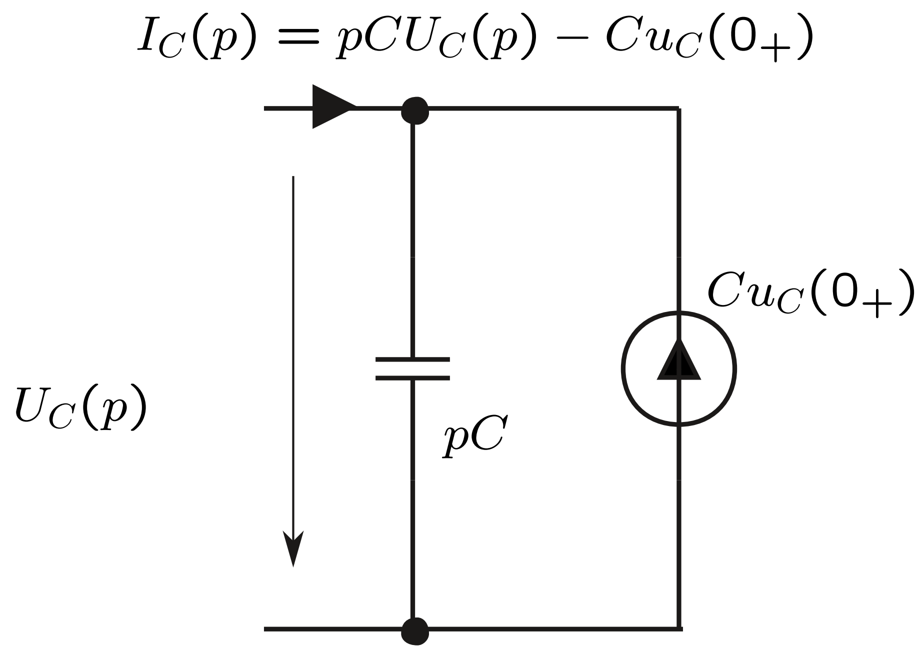


$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) \mathrm{d}\tau + u_C(0_+) \Rightarrow \quad U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}$$

$$i_C(t) = C \frac{\mathrm{d} u_C(t)}{\mathrm{d} t} \Rightarrow \quad I_C(p) = pC U_C(p) - C u_C(0_+)$$

Operátorové modely kapacitoru pro obvodové rovnice

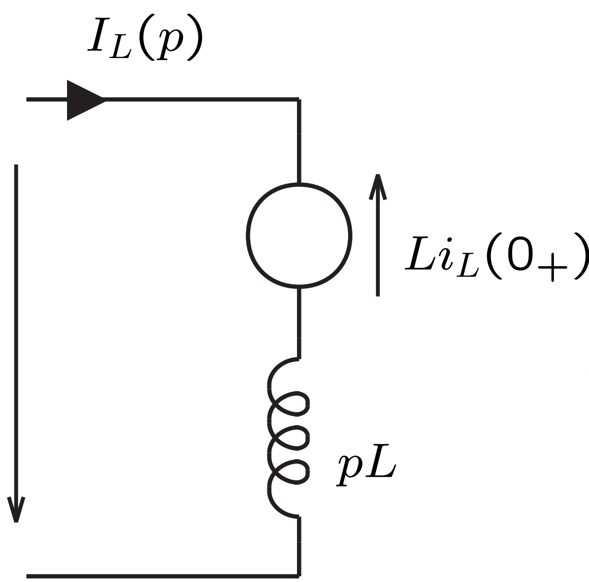




$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}$$

Operátorové modely induktoru pro obvodové rovnice

$$U_L(p) =$$
$$= pLI_L(p) - Li_L(0_+)$$



$$I_L(p) = \frac{1}{pL}U_L(p) + \frac{i_L(0_+)}{p}$$