

Fakulta biomedicínského inženýrství – Teoretická elektrotechnika

Prof. Ing. Jan Uhlíř, CSc.

Léto 2020

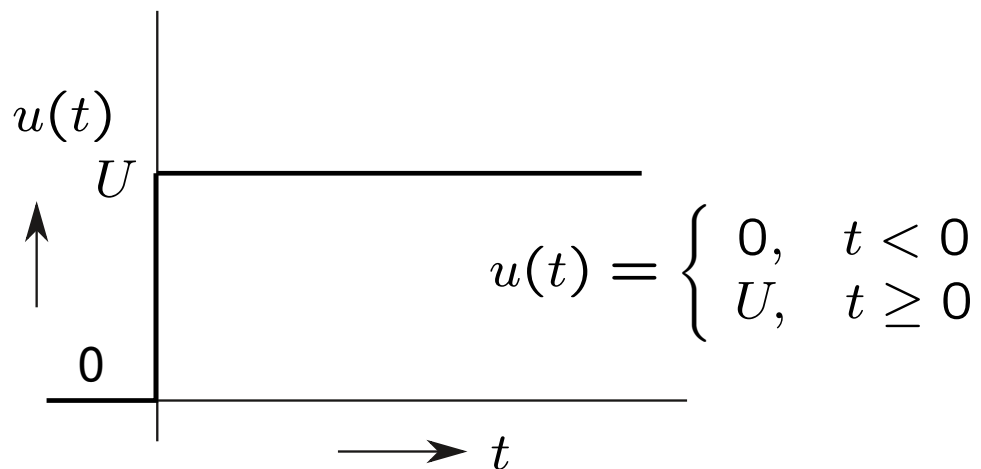
4. Výpočty v časové oblasti

Laplaceova transformace – aplikace v analýze elektrických obvodů

Obvodové rovnice s integrálním nebo diferenciálním popisem vztahů mezi obvodovými veličinami

Přechodné děje — napětí (proud) v obvodu se skokem budicí veličiny

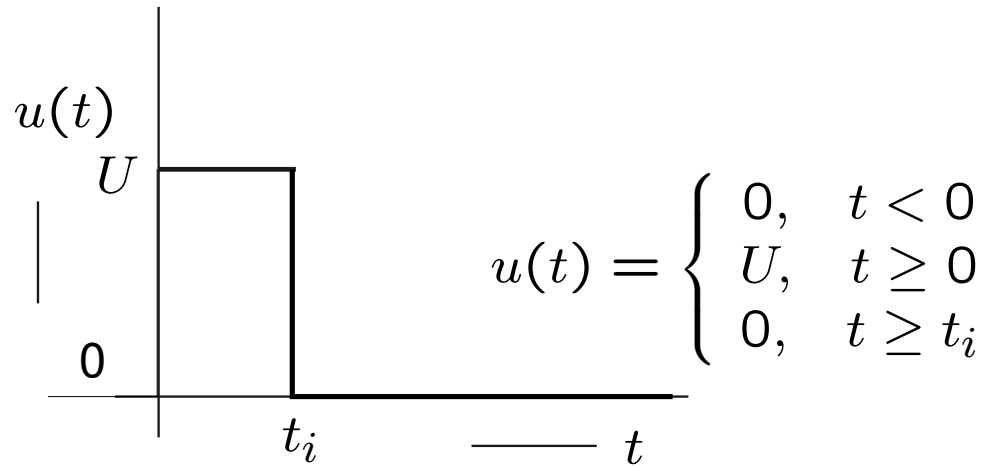
Pro analýzu v časové oblasti nejčastěji použijeme impulsové signály.
Nejjednodušší z nich se nazývá napěťový (proudový) skok.



Laplaceův obraz

$$U(p) = \frac{U}{p}$$

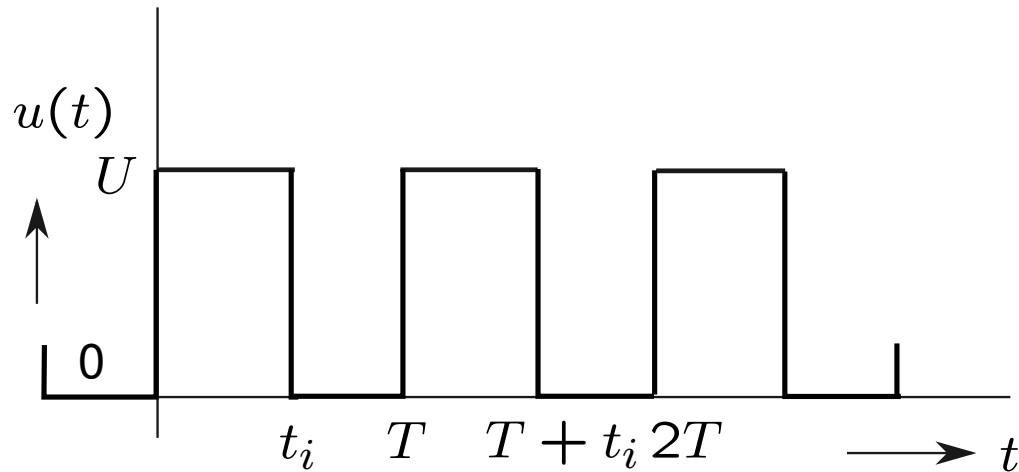
Další signál pro analýzu v časové oblasti označujeme jako osamělý impuls.



Laplaceův obraz

$$U(p) = \frac{U}{p}(1 - e^{-pt_i})$$

Periodický impulsní průběh



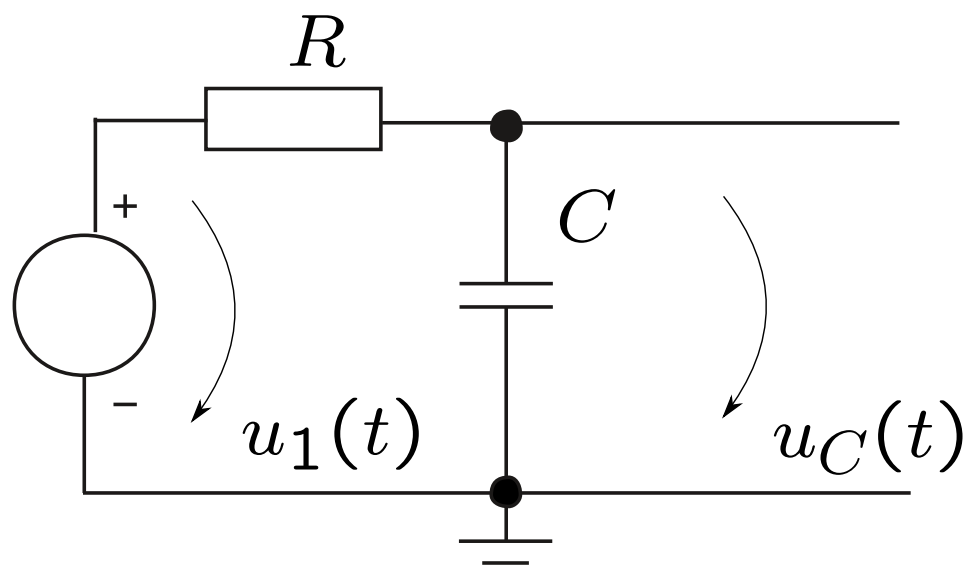
$$u(t) = \begin{cases} 0, & kT + t_i < t < (k + 1)T \\ U, & kT \leq t \leq kT + t_i \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & kT + t_i < t < (k + 1)T \\ U, & kT \leq t \leq kT + t_i \end{cases}$$

$$k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad \text{střída (duty cycle) } d = \frac{t_i}{T - t_i}$$

$$\text{Laplaceův obraz } U(p) = \frac{U}{p} \frac{(1 - e^{-pt_i})}{(1 - e^{-pT})}$$

Obvod RC buzený skokem napětí – integrační obvod



V RC obvodu se bude kapacitor přes rezistor nabíjet. Počáteční napětí na kapacitoru v čase $t = 0$ nechť je $u_C(0)$.

V čase $t \rightarrow \infty$ půjde $u_C(t) \rightarrow U$. Nabíjecí proud klesne k nule tehdy, kdy se napětí na zdroji vyrovná s napětím na nabitém kapacitoru.

Pro proud v obvodu lze napsat rovnici

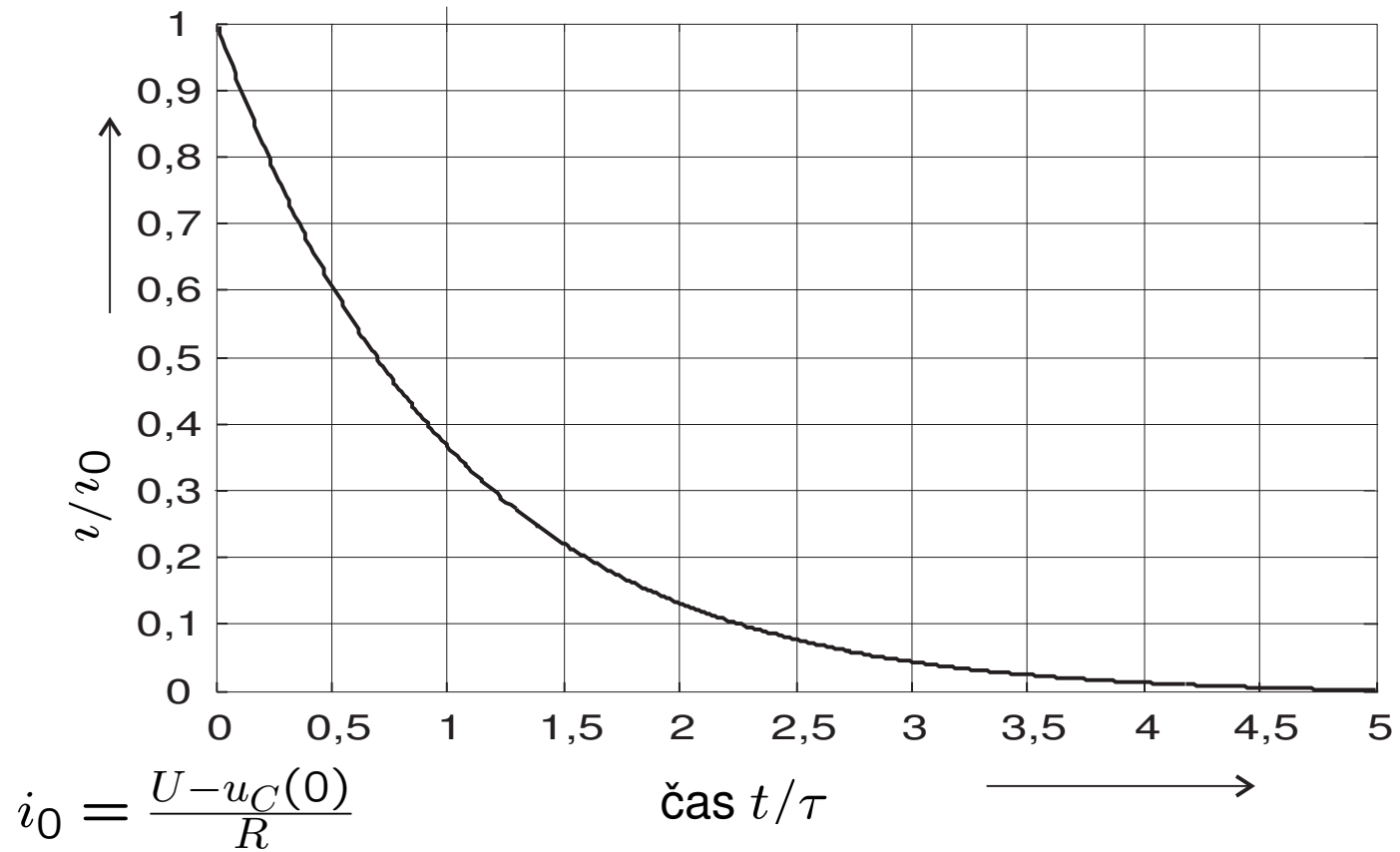
$$Ri(t) = U - u_C(t) = U - \left(\frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0) \right)$$

Řešení popisuje časový průběh proudu pro $t \geq 0$

$$i(t) = \frac{U - u_C(0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = RC$ je časová konstanta a má rozměr v sekundách.

Normalizovaný časový průběh proudu



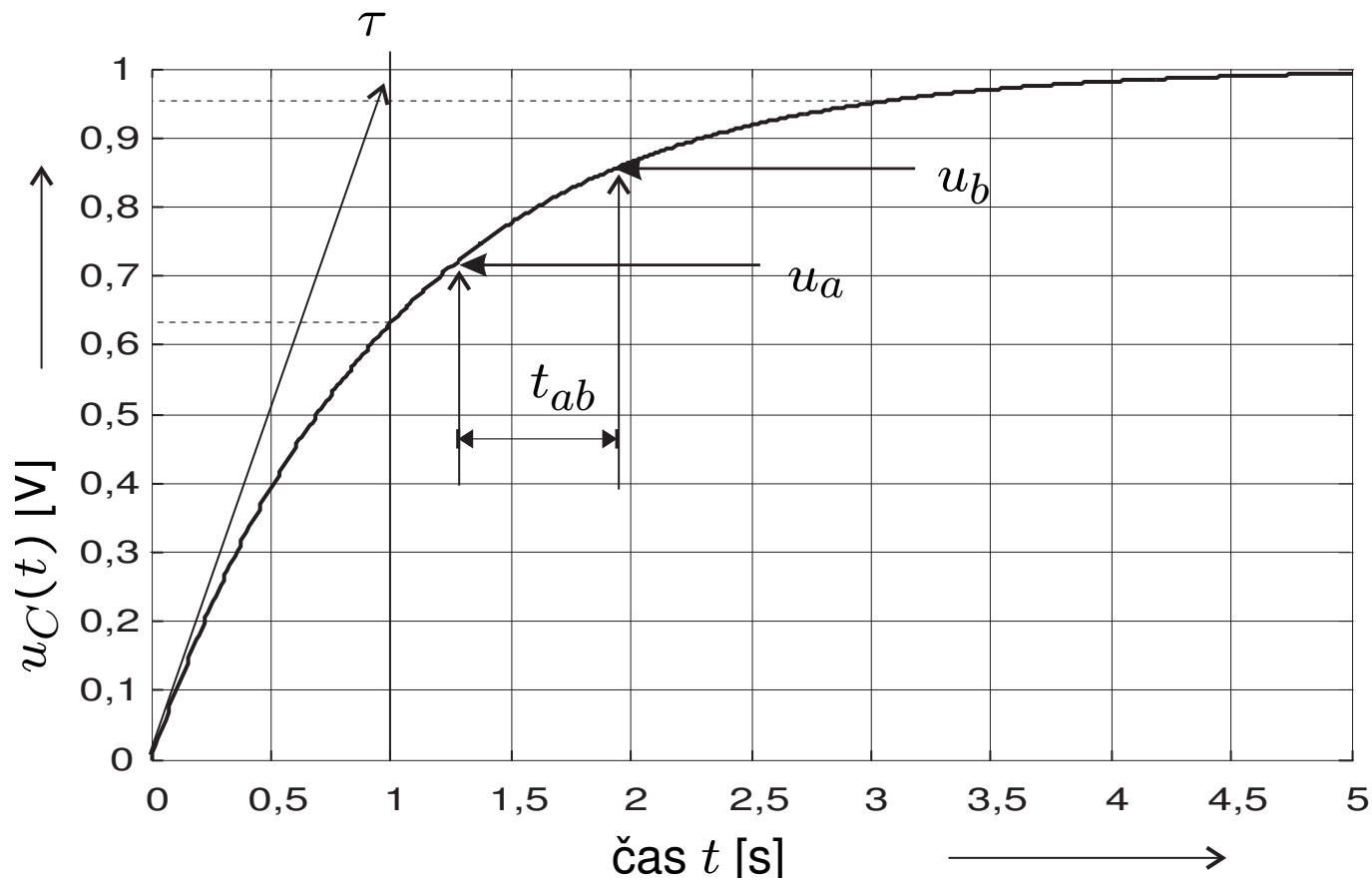
Pro napětí $u_C(t)$ dostaneme

$$u_C(t) = U - (U - u_C(0)) e^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

a pro $u_C(0) = 0$

$$u_C(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Graficky průběh nabíjení ukazuje obrázek, a to pro případ, že $u_C(0) = 0$, $U = 1\text{ V}$, $RC = \tau = 1\text{ s}$, např. $R = 100\text{ k}\Omega$ a $C = 10\text{ }\mu\text{F}$.



Z obrázku lze vyčíst některé vlastnosti napětí na kapacitoru:

- směrnice tečny exponenciály na počátku přechodného děje je rovna časové konstantě τ ,
- po uplynutí doby $t = \tau$ dosáhne exponenciála přibližně 63% z ustálené hodnoty,
- po uplynutí času odpovídajícího třem časovým konstantám je napětí na kapacitoru větší než 95% ustálené hodnoty,
- po uplynutí času odpovídajícího pěti časovým konstantám je napětí na kapacitoru větší než 99% ustálené hodnoty,
- zvolíme-li na exponenciálním průběhu dvě libovolné úrovně napětí u_a a u_b , můžeme při známé velikosti ustálené hodnoty U vypočítat dobu t_{ab} , po které exponenciála bude probíhat mezi napětími u_a a u_b

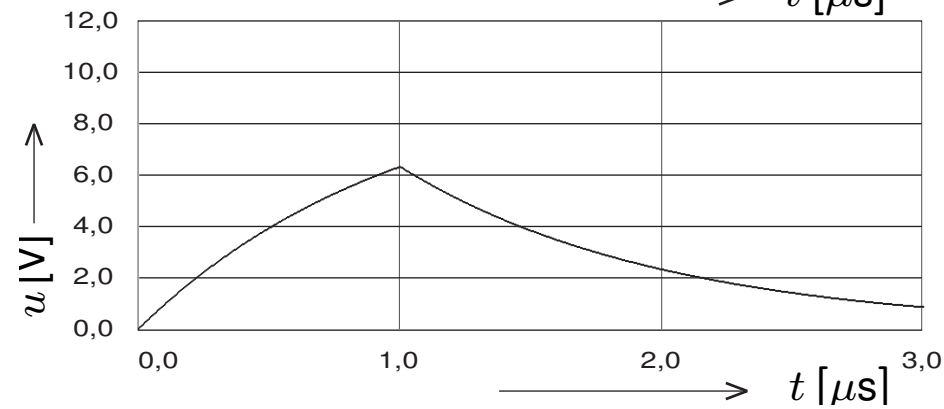
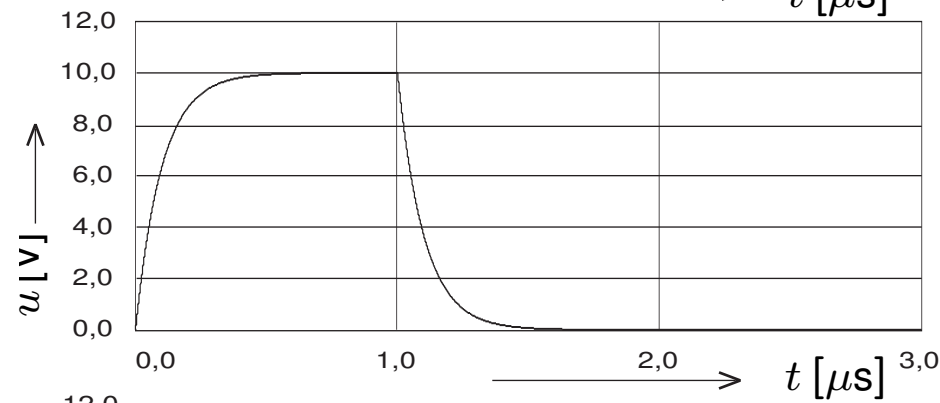
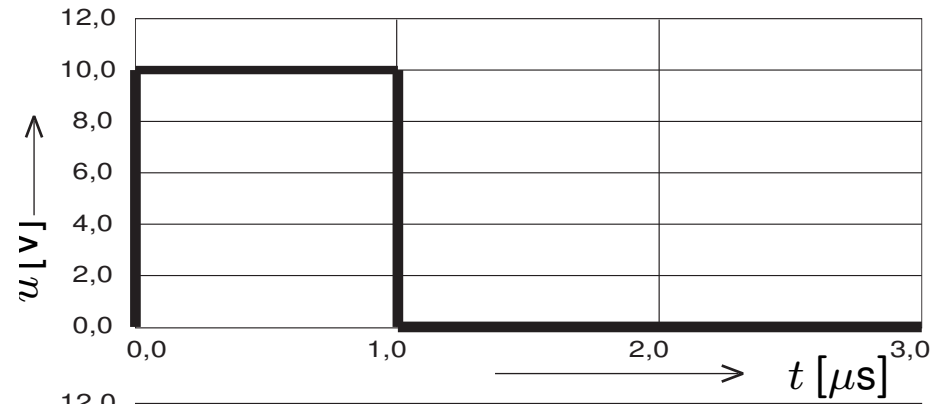
$$t_{ab} = \tau \ln \left(\frac{U - u_a}{U - u_b} \right).$$

Nad výrazy pro napětí na kapacitoru a proud obvodem lze uvést následující praktické úvahy:

- přechodný děj lze urychlit jenom zmenšením časové konstanty $\tau = R.C$,
- zmenšení časové konstanty lze docílit zmenšením kapacity C , což v praxi nemusí být vždycky možné,
- zmenšení časové konstanty lze docílit zmenšením odporu R ; to ale vede k většímu proudu $i(0) = U/R$, což nemusí snášet zdroj impulsního napětí.

Zkracování přechodných dějů v elektronických obvodech je vždy bojem s přírodou.

Nechť napětí $u_1(t) = U$ skokem přejde v čase t_i z hodnoty U na hodnotu $u_1(t_i) = 0$. Jedná se o buzení impulsem:



Pokud bylo $u_C(0) = 0$, vytvoří se v čase t_i počáteční podmínka pro následující přechodný děj

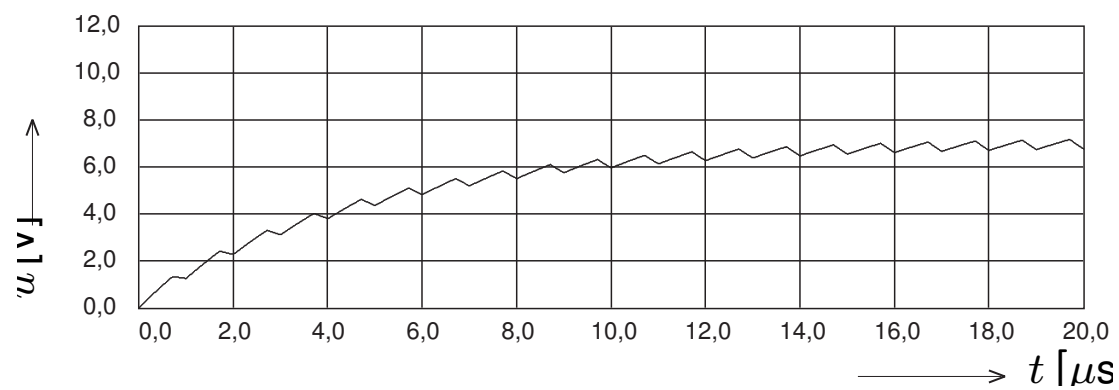
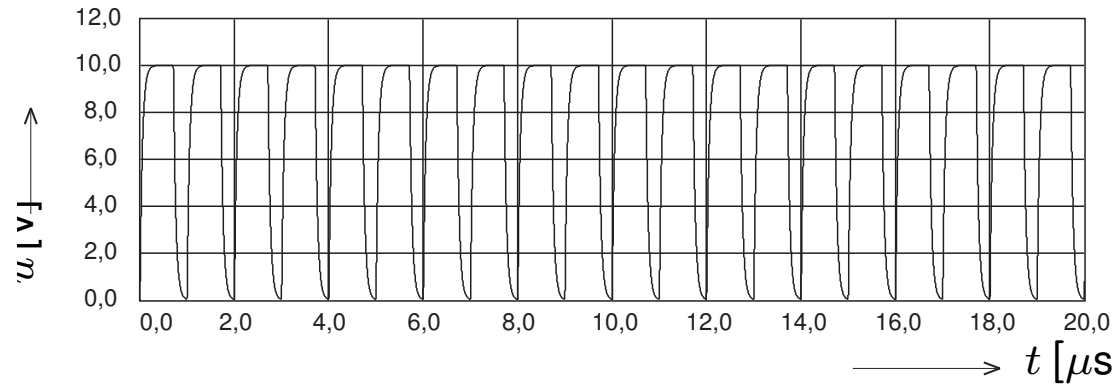
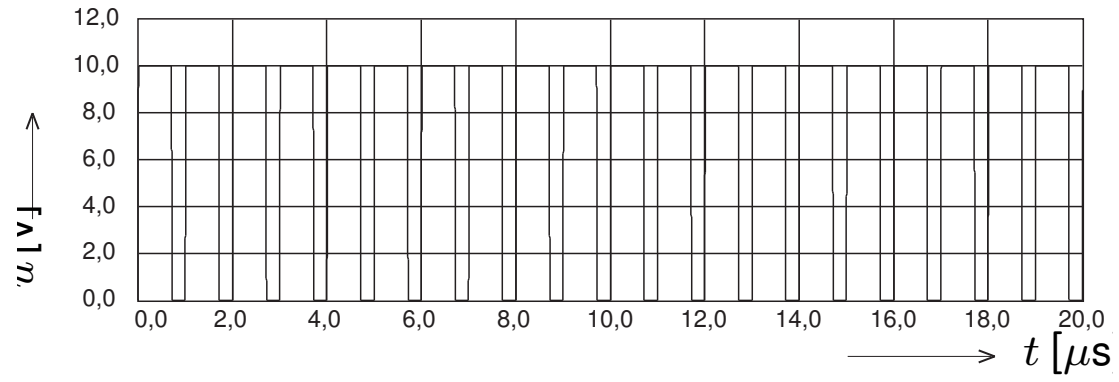
$$u_C(t_i) = U(1 - e^{-\frac{t_i}{\tau}})$$

Pak z výrazu pro přechodný děj s počáteční podmínkou $u_C(t_i)$ a nulovým budícím napětím dostaneme

$$u_C(t) = 0 - [0 - u_C(t_i)] e^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

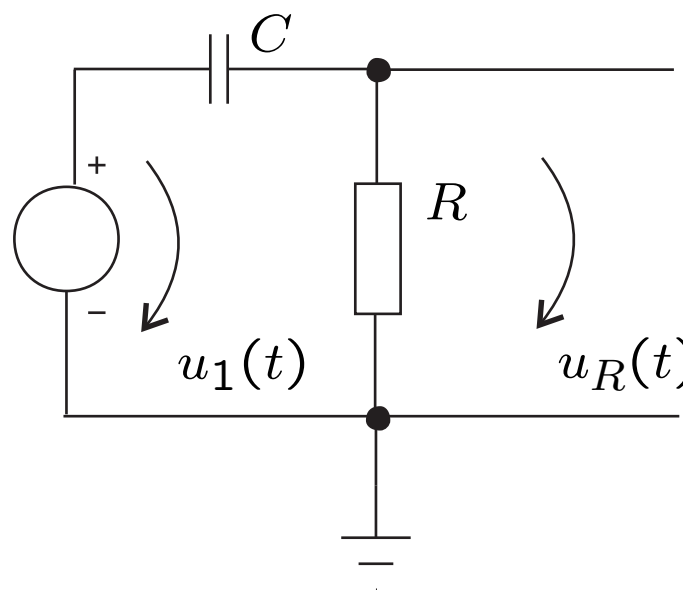
$$u_C(t) = u_C(t_i) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

Buzení periodickými impulsy



Na prvním grafu výstupního signálu je časový průběh na výstupu z obvodu s časovou konstantou $\tau = 50 \text{ ns}$ (tedy 5 % z periody impulsního průběhu), na druhém grafu je časová konstanta obvodu nastavena na $5 \mu\text{s}$ (tedy pětinasobek periody). V tomto druhém případě se chování obvodu dá interpretovat jako integrace. Povšimněme si, že výstupní napětí obvodu na konci přechodného děje osciluje kolem hodnoty 7 V. To je hodnota integrálu z periody vstupního průběhu (10 V a 70 % periody). Napětí se „vlní“, ale pokud bychom časovou konstantu zvětšili, zvlnění by se zmenšilo, avšak ustálení na hodnotě integrálu by trvalo déle.

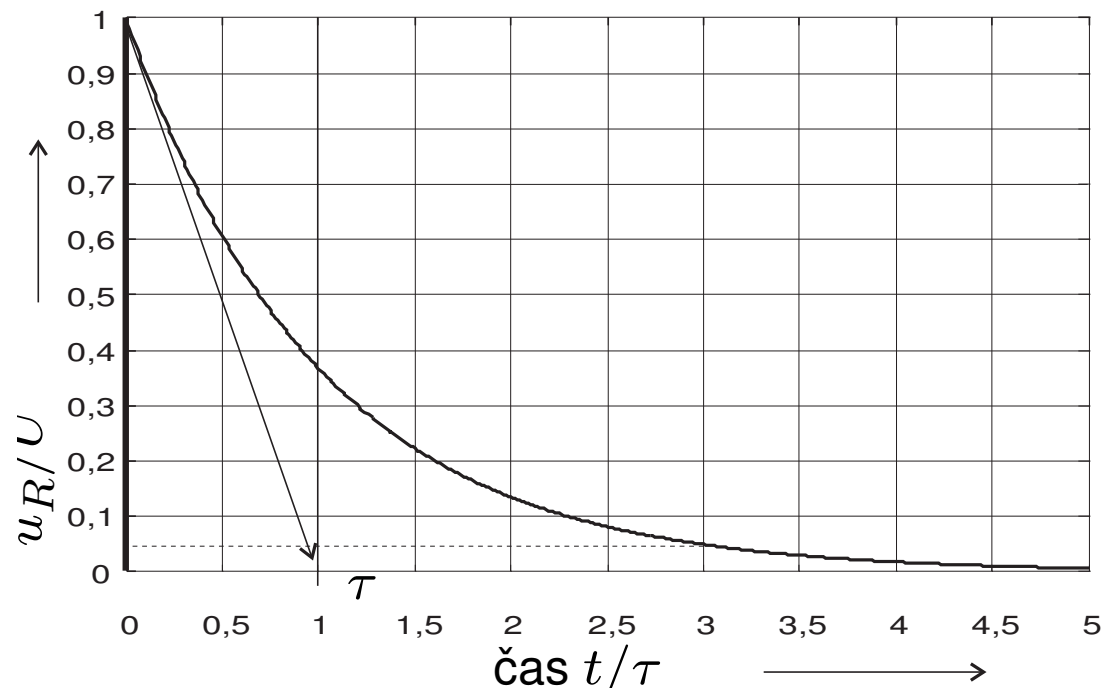
Obvod RC buzený skokem napětí – derivační obvod



Pokud $u_C(0) = 0$ je napětí na výstupu derivačního obvodu pro $t < 0$ rovno $u_R(0_-) = 0$. Pro $t \geq 0$ platí

$$u_R(t) = Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

Normalizovaný průběh



Při buzení osamělým impulsem skočí vstupní impuls z hodnoty napětí

$u_1(t) = U$ v čase t_i zpět na nulovou hodnotu. Pak bude

$$u_R(t) = (0 + u_C(t_i)) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} = (u_R(t_i) - U) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \quad \text{pro } t \geq t_i$$

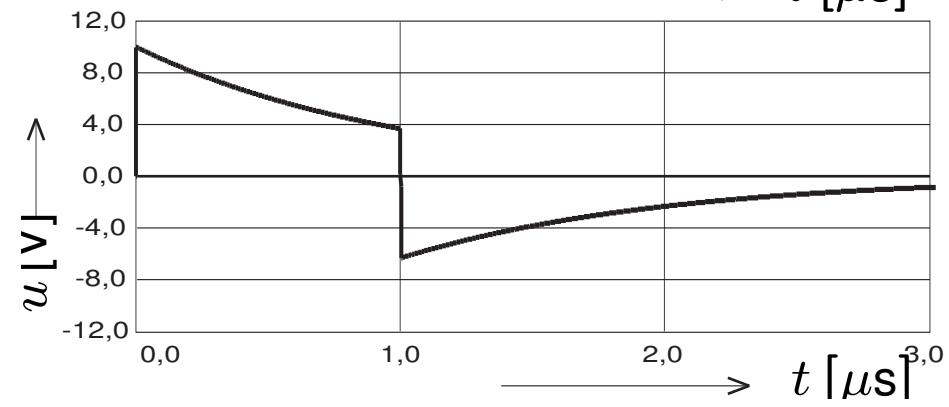
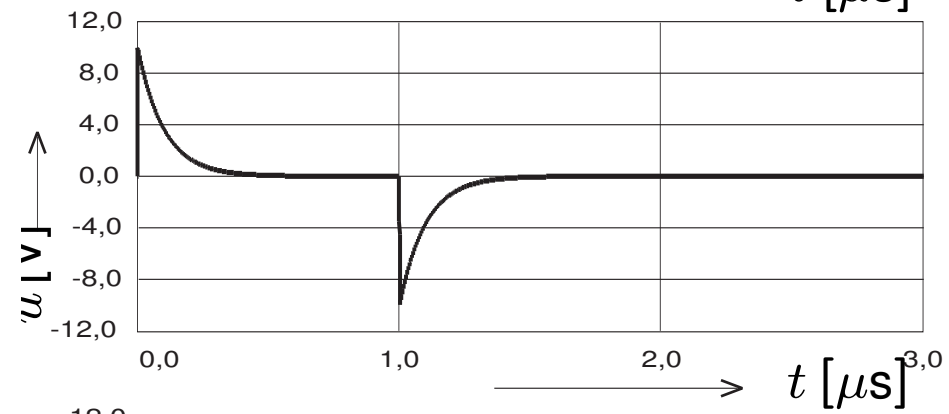
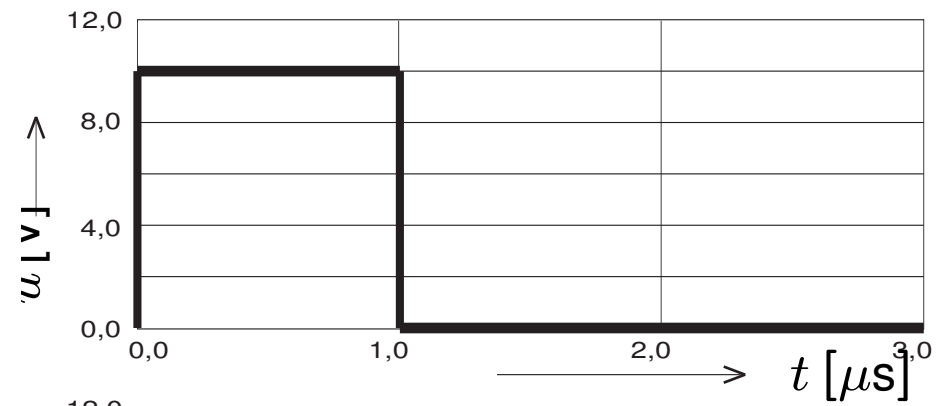
Pokud bylo před příchodem impulsu v čase $t = 0$ výstupní napětí nulové, bude

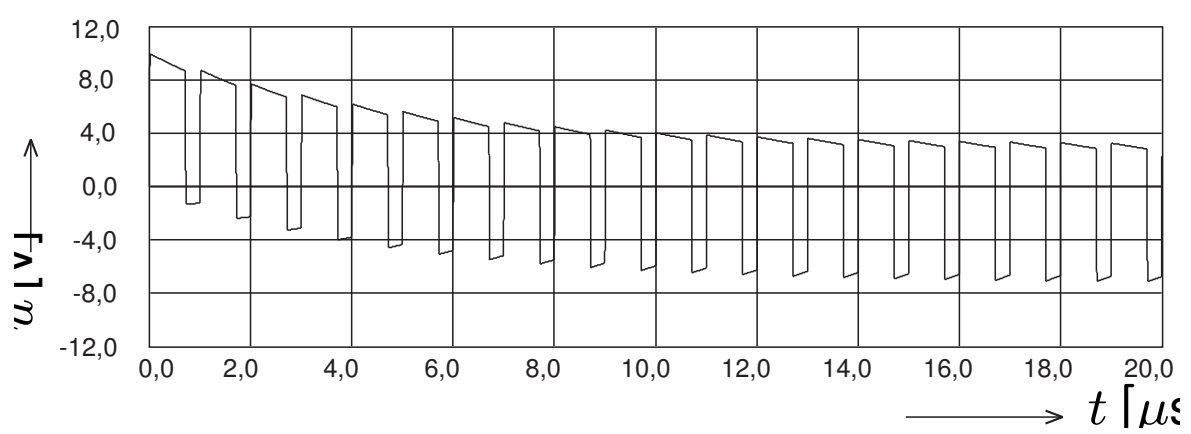
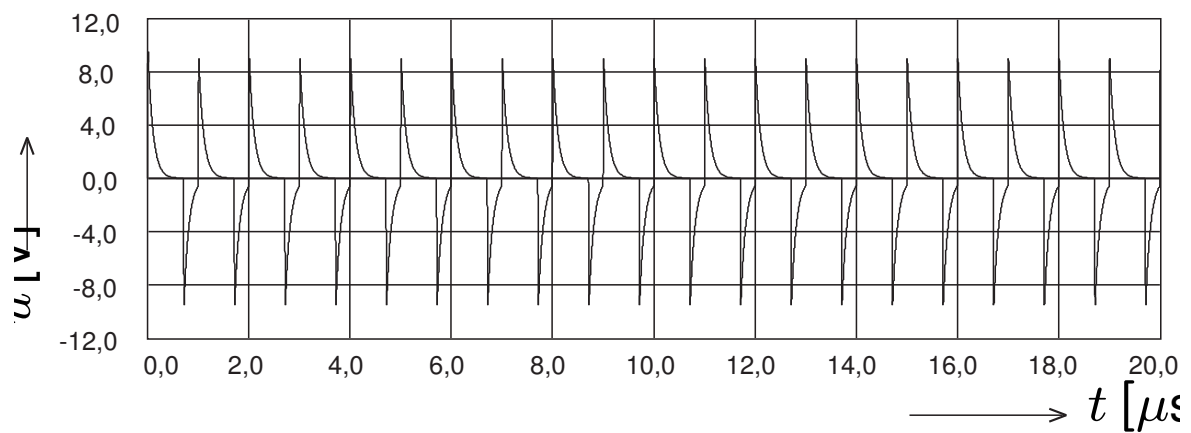
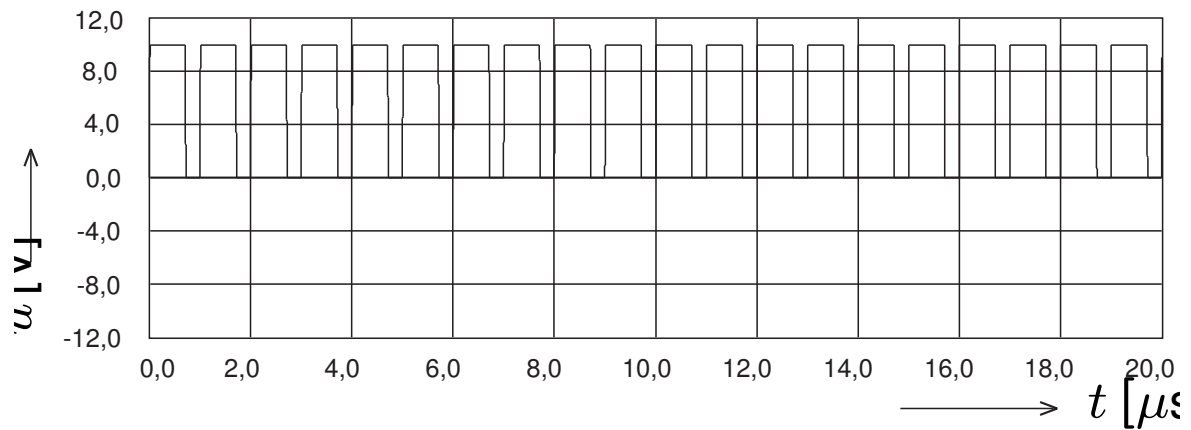
$$u_R(t_i) = U e^{-\frac{t_i}{\tau}} \quad u_R(t) = U (e^{-\frac{t_i}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \quad \text{pro } t \geq t_i$$

A pokud by přechodný děj v průběhu času $t_i \gg \tau$ skončil, tedy $u_R(t_i) \approx 0$,

pak

$$u_R(t) = -U e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \quad \text{pro } t \geq t_i$$

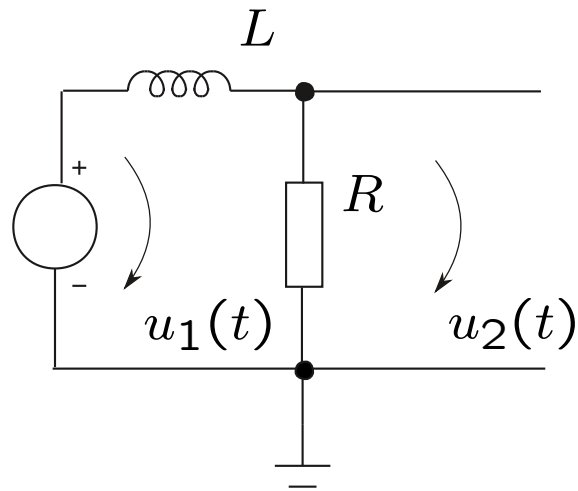




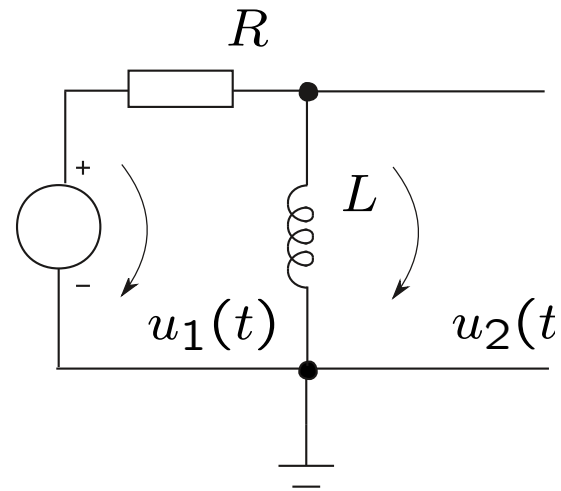
Na obrázku je naznačena situace analogická k příkladu buzení integračního obvodu periodickými impulsy. Nejprve je uveden příklad buzení obvodu impulsy s periodou $1 \mu\text{s}$ a střídou 0,7 (impuls):0,3 (mezera) s tím, že časová konstanta obvodu je $0,1 \mu\text{s}$. V druhém případě je časová konstanta obvodu $5 \mu\text{s}$.

V prvním případě lze přiznat obvodu roli obvodu derivačního, protože generuje jednotlivé impulsy, které svou polaritou a krátkostí trvání připomínají derivaci skoků (derivace ideálního skoku je nekonečně krátký impuls).

Články RL



integrační obvod



derivační obvod

Pro integrační i derivační článek složený z induktoru a rezistoru platí, při buzení skokem napětí nebo impulsy, identické vztahy jako pro články RC.

$$\text{Časová konstanta je } \tau = \frac{L}{R}.$$

Obvod LR se spínačem

V obvodu s induktorem můžeme vytvořit situaci, kdy se na svorkách některých součástek může objevit napětí vyšší, než má kterýkoli zdroj napětí. To využíváme v tzv. spínaných zdrojích a regulátorech napájecích napětí.

Princip takových obvodů je založen na skutečnosti, že induktor hromadí energii v magnetickém poli, které je vytvořeno procházejícím proudem. Proto má procházející proud setrvačné chování. Pokud spínač skokem změní odpor v obvodu, přechodný děj bude vycházet z počáteční podmínky, dané proudem před přepnutím. Platí tedy, je-li proud před sepnutím určen menším odporem než je odpor připojený po přepnutí, vznikne na svorkách připojeného rezistoru skok napětí s větším napětím, než má zdroj, který do induktoru proud zavedl.

Spínání indukční zátěže

