Fakulta biomedicínského inženýrství – Teoretická elektrotechnika

Prof. Ing. Jan Uhlíř, CSc.

Léto 2020

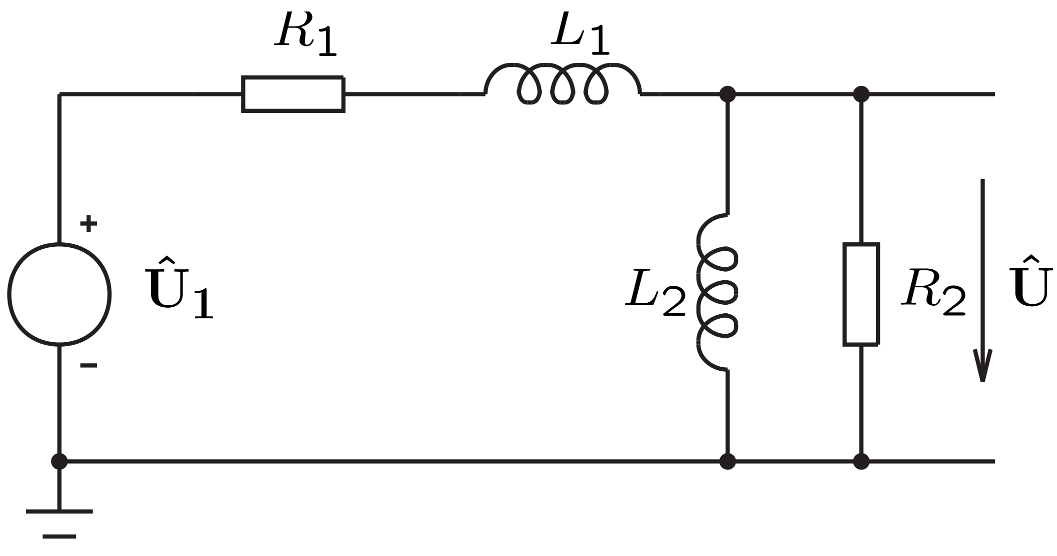
5. Obvody druhého řádu

– frekvenční a časová analýza

- Širokopásmový obvod
- Rezonanční obvod

Obvod druhého řádu – HUS

– širokopásmový obvod (zjednodušený model transformátoru)



L_1 – rozptylová indukčnost
L_2 – hlavní indukčnost
R_1 – odpor vinutí
R_2 – přetransformovaný odpor zátěže a ztráty v jádře

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{1}} = R_1 + j\omega L_1,$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}} = \frac{j\omega L_2 R_2}{R_2 + j\omega L_2},$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{1}} \frac{\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}}}{\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}}}$$

a odtud

$$\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_1}{L_2}\right) - j\left(\frac{1}{\omega\tau_d} - \omega\tau_i\right)}.$$

kde $\tau_d = \frac{L_2}{R_1}$ a $\tau_i = \frac{L_1}{R_2}$ jsou časové konstanty pro derivační a integrační charakter frekvenční závislosti přenosu.

$$U_{2m} = U_{1m} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega\tau_d} - \omega\tau_i\right)^2}}.$$

Jestliže budeme považovat fázi vstupního napětí za nulovou, pak můžeme pro fázi výstupního napětí najít frekvenční závislost ve tvaru

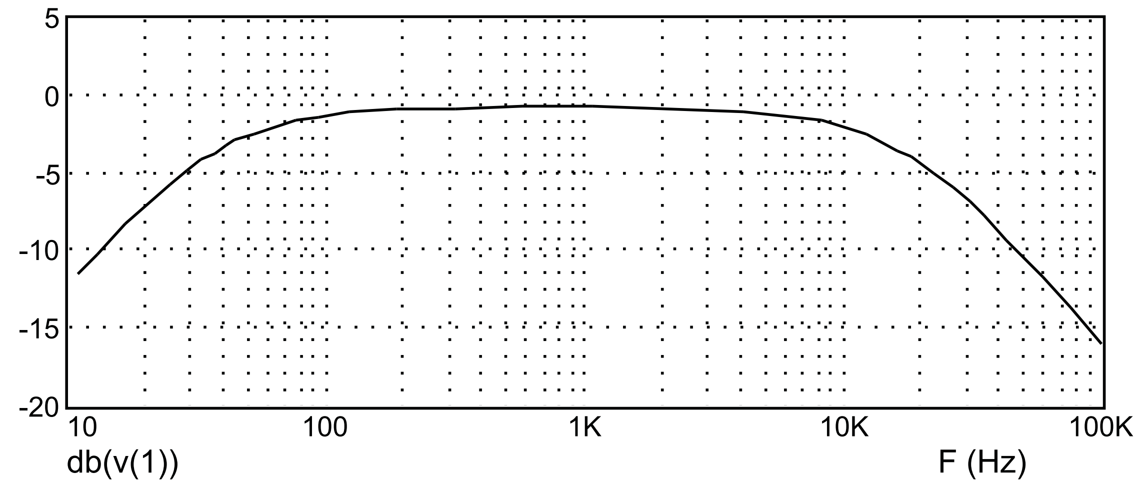
$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(\mathbf{H}(j\omega))}{\mathrm{Re}(\mathbf{H}(j\omega))}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\omega\tau_d} - \omega\tau_i\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_1}{L_2}\right)}.$$

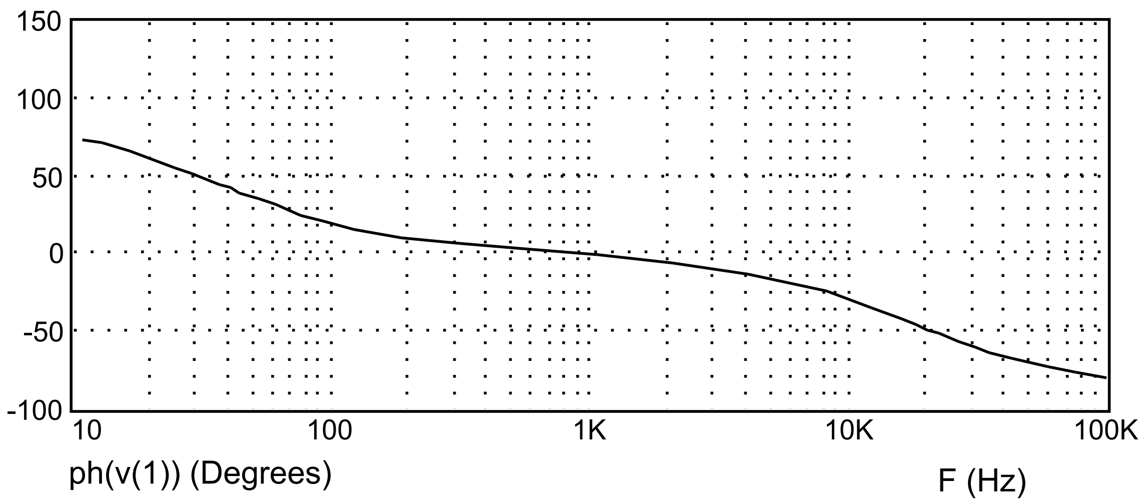
Kvalitní transformátor vykazuje $R_1 \ll R_2$ a $L_1 \ll L_2$. Potom v určitém pásmu kmitočtů, kde $\varphi \approx 0$ bude $U_{2m} \to U_{1m}$.

Pro takový transformátor platí $\tau_i \ll \tau_d$ a lze přibližně určit šířku přenášeného pásma, t.j. frekvenční interval, ve kterém je fáze $\varphi = \pm 45^\circ$

$$\Delta\omega \approx 1/\tau_i - 1/\tau_d$$

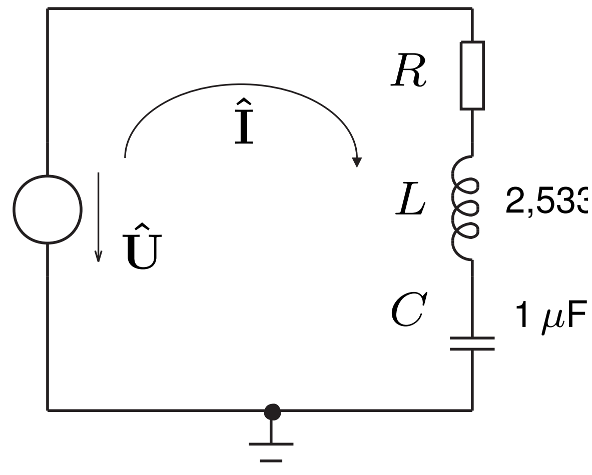
Nízkofrekvenční (audio) transformátor





$$L_1 = 10\,\mathrm{mH},\ L_2 = 200\,\mathrm{mH},\ R_1 = 50\,\Omega,\ R_2 = 1k\Omega, \quad \Delta f \approx 16\mathrm{kHz}$$

Sériový rezonanční obvod RLC ve frekvenční oblasti



$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{\mathbf{U}} \frac{j\omega C}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}$$

označíme

$$\frac{1}{LC} = \omega_r^2,$$

kde $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r$ je rezonanční kmitočet.

$$\hat{\mathbf{U}} \leftrightarrow U_m \sin \omega t$$

$$\hat{\mathbf{I}} \leftrightarrow I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I_m = |\hat{\mathbf{I}}| = U_m \frac{\omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

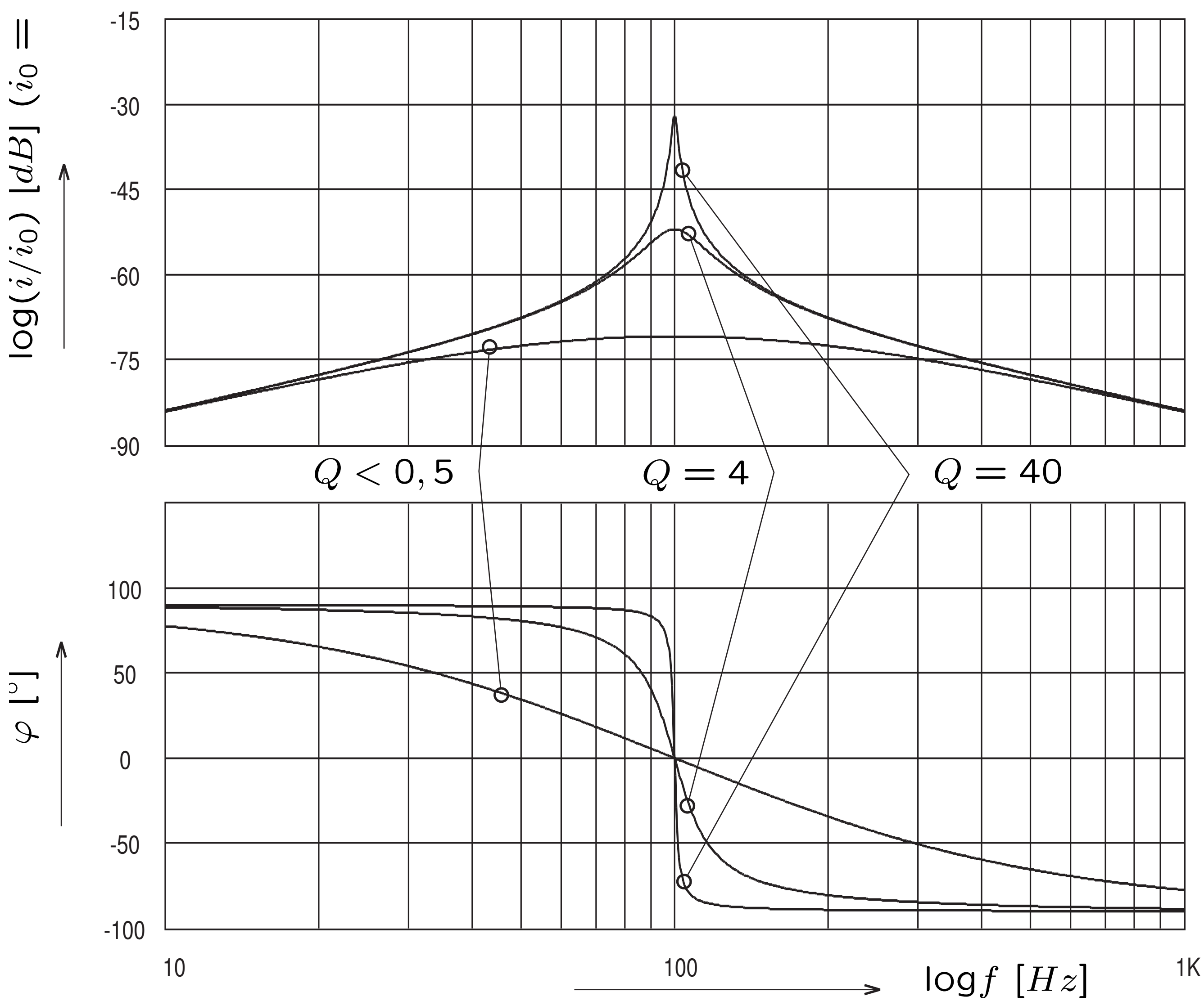
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right)$$

když $\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, bude obvod naladěn do rezonance:

$$I_m = |\hat{\mathbf{I}}| = U_m \frac{\omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_m}{R}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right) = 0$$

RLC obvod – frekvenční charakteristika

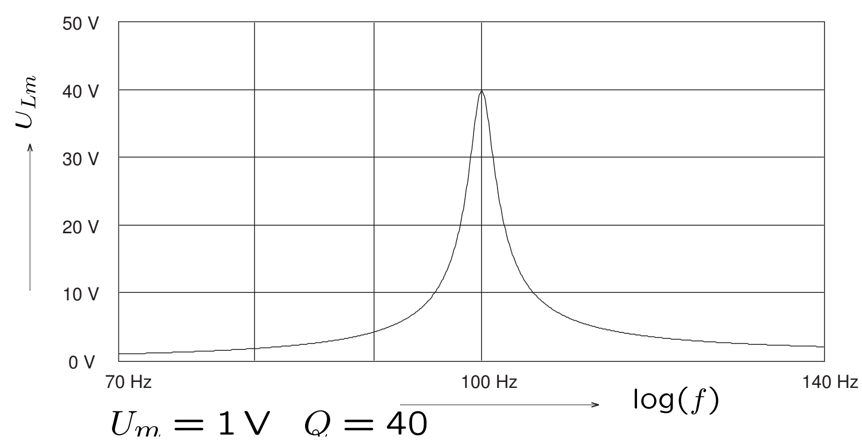


Napětí na induktoru $\quad \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{L}} = j\omega L\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{U}}\frac{-\omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC)+j\omega RC}$

Při rezonanci $\quad \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{L}} = j\hat{\mathbf{U}}\frac{1}{\omega_r RC} = jQ\,\hat{\mathbf{U}}$

kde $Q = \frac{1}{\omega_r RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ je činitel jakosti obvodu

$$U_{Lm} = U_m\,Q \quad \varphi = \pi/2$$

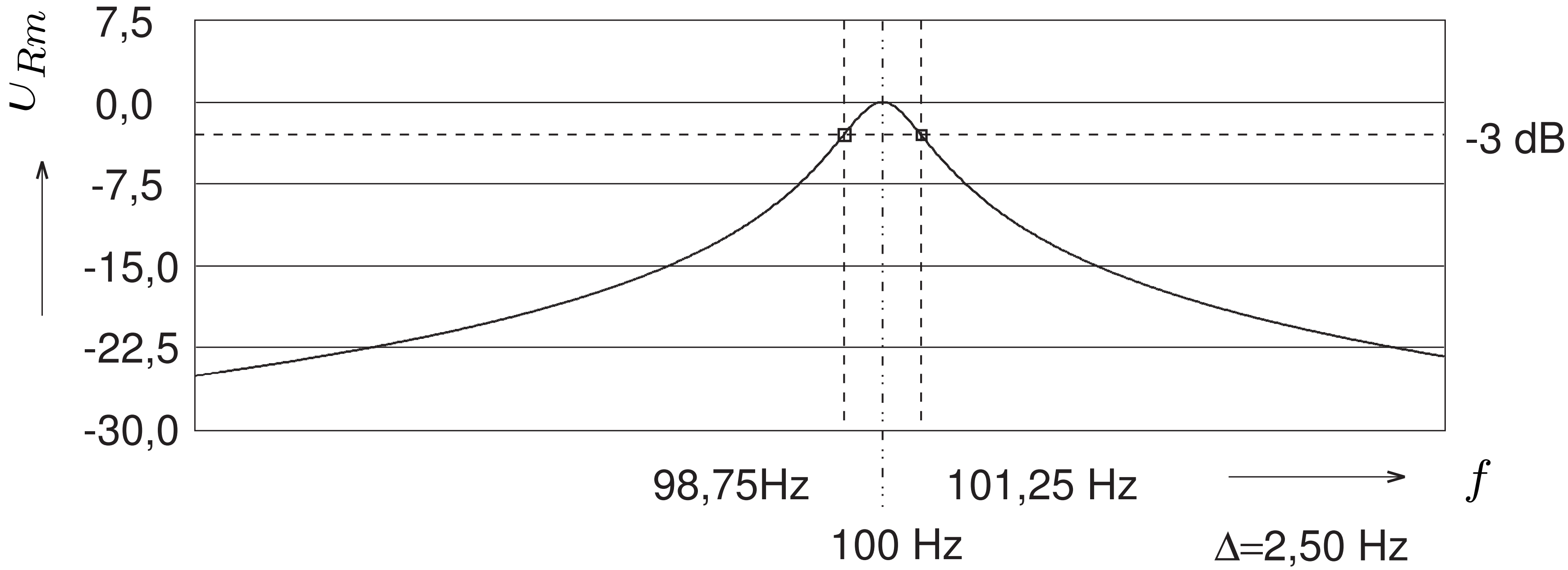


Šířka pásma – mezní kmitočty $\varphi = \pm 45°,\ U_{Rm}/U_m = -3\text{dB}$

$$\hat{\mathbf{U}}_R = \hat{\mathbf{U}}\,\frac{\omega RC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}$$

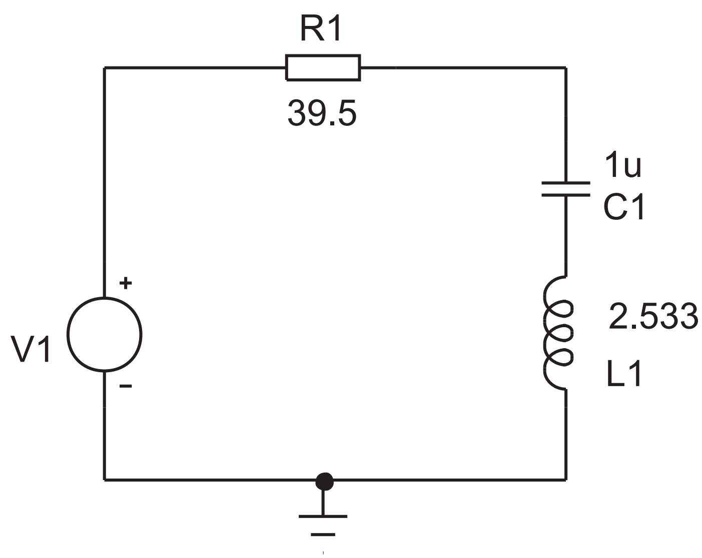
$$\varphi = \pm 45° \Longrightarrow \frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC} = \pm 1$$

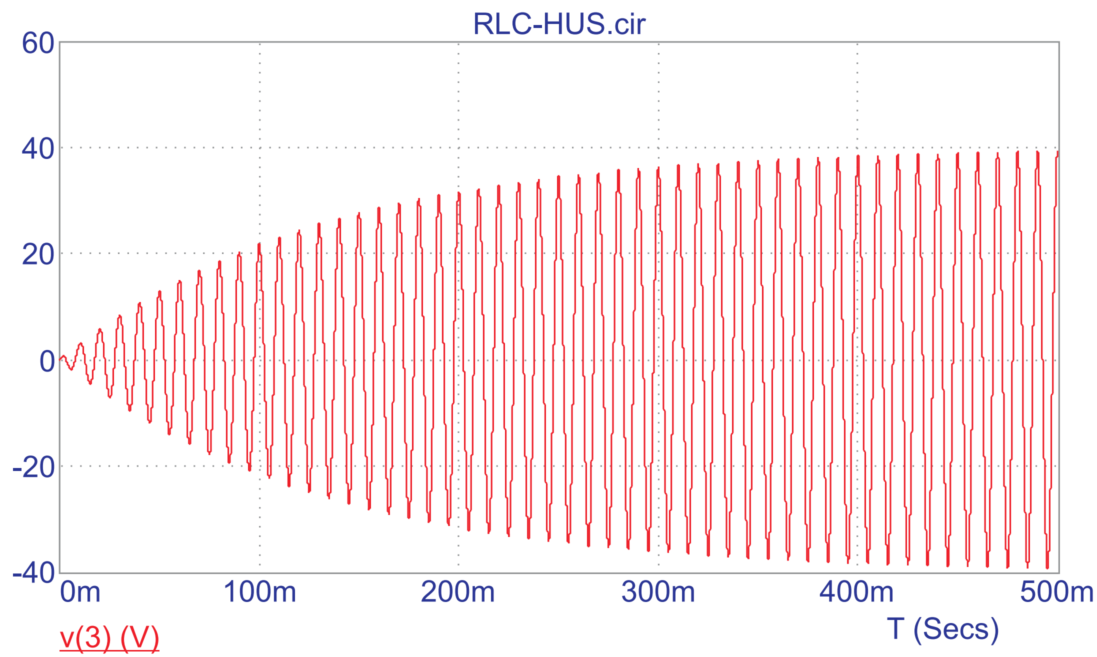
Pro $Q > 5$ $\omega_{1,2} = \omega_r(1 \pm \frac{1}{2Q}) \Longrightarrow Q = \frac{\omega_r}{\omega_1 - \omega_2} = f_r/\Delta_{f(3\text{dB})}$



Přechodný děj při sinusovém buzení rezonančního obvodu zdrojem napětí

$$U_m = 1\mathrm{V}, \mathrm{f} = 100\mathrm{Hz},\ \mathrm{Q} = 40.$$

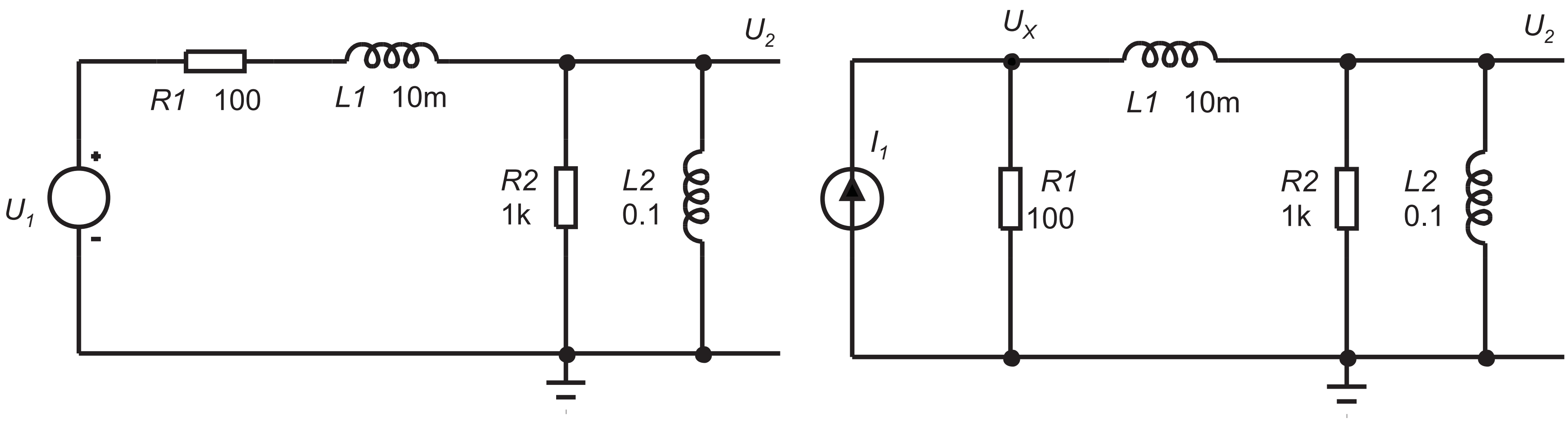




Napětí na svorkách induktoru

RC obvod druhého řádu

Řešení časové odezvy složitějšího obvodu



Dvě diferenciální rovnice pro dvě nezávislá napětí u_x a u_2 vytvořená skokem napětí $u_1 = 1(t)U$

Pro $u_x(t)$ při nulových počátečních podmínkách platí

$$I_1 = \frac{u_1}{R_1} = \frac{u_x}{R_1} + \frac{1}{L_1}\int_0^t (u_x - u_2)\mathrm{dt}$$

Pro $u_2(t)$ při nulových počátečních podmínkách platí

$$\frac{u_2}{R_2} + \frac{1}{L_2}\int_0^t u_2 dt + \frac{1}{L_1}\int_0^t (u_2 - u_x)\mathrm{dt} = 0$$

Časový průběh odezvy na skok najdeme řešením uvedené soustavy diferenciálních rovnic.

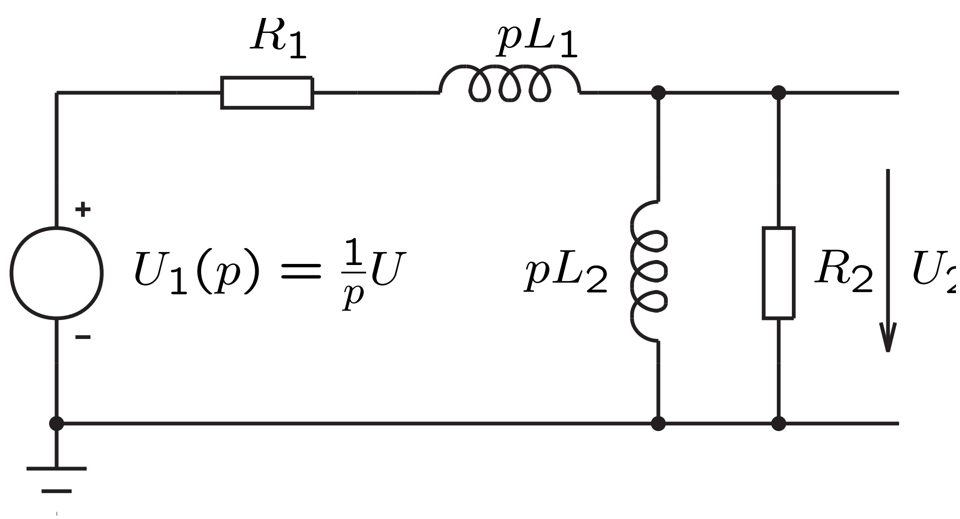
$$u_2(t) = \frac{R_2}{L_1}\,\frac{U}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right)$$

kde

$$\lambda_1 - \lambda_2$$

Obvod druhého řádu – odezva na skok

– širokopásmový obvod (zjednodušený model transformátoru)



L_1 – rozptylová indukčnost

L_2 – hlavní indukčnost

R_1 – odpor vinutí

R_2 – přetransformovaný odpor zátěže a ztráty v jádře

S použitím obrazu pro $u_1(t)$ ve tvaru $U_1(p) = U\frac{1}{p}$ dostaneme Laplaceův obraz pro $U_2(p)$

$$U_2(p) = U\frac{R_2}{L_1} \frac{1}{p^2 + p\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_1}\right) + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}$$

$$U_2(p) = \frac{R_2}{L_1} \frac{U}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}$$

$$u_2(t) = \frac{R_2}{L_1} \frac{U}{(\lambda_1-\lambda_2)} \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right)$$

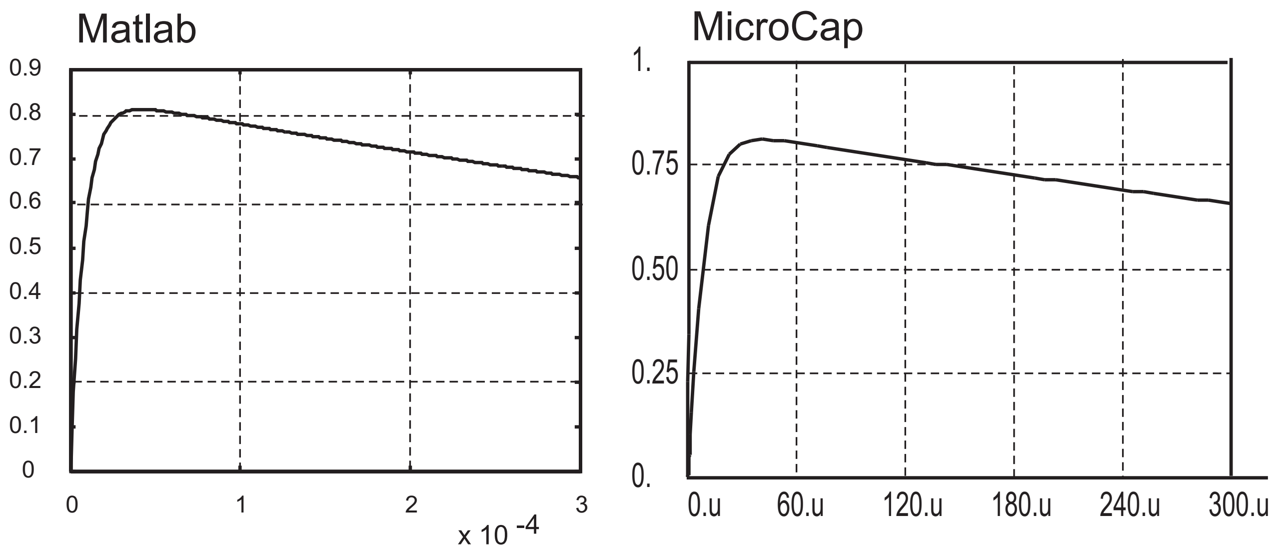
Pro dané hodnoty

$L_1 = 10\mathrm{mH},\ L_2 = 100\mathrm{mH},\ R_1 = 100\Omega,\ R_2 = 1\mathrm{k}\Omega$, dostaneme hodnoty $\lambda_1 = -119160,\ \lambda_2 = -840$

Řešení integrodiferenciální rovnice s konstantními koeficienty s použitím Laplaceovy transformace nalezlo vzorec popisující časovou funkci vybrané obvodové veličiny, tedy řešení v analytickém tvaru.

Simulační programy pro dané parametry obvodových prvků využívají numerické řešení obvodových rovnic a vedou k získání průběhu napětí a proudů v konkrétním obvodu, aniž je potřeba znát analytické výrazy, které je popisují.

Na obrázku je srovnání výstupu z Matlabu a Microcapu



$\mathrm{L1 = 0.01; L2 = 0.1; R1 = 100; R2 = 1000; t = [0 : 1e-6 : 3e-4]; U = 1;}$

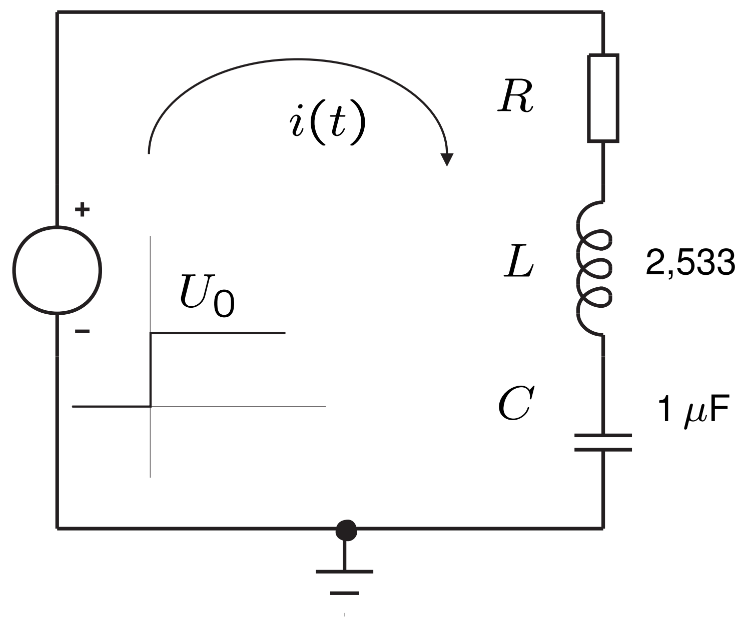
$\mathrm{lambda = roots([1 \quad R1/L1 + R2/L2 + R2/L1 \quad R1 * R2/(L1 * L2)]);}$

$\mathrm{u2 = (R2/L1)*}$

$\mathrm{*(1/(lambda(1) - lambda(2))) * (exp(t * lambda(1)) - exp(t * lambda(2)));}$

$\mathrm{plot(t, u2)}$

Sériový rezonanční obvod RLC v časové oblasti



Obvod popisuje integrodiferenciální rovnice

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau = U_0 \quad \text{pro} \quad t > 0 \quad \text{a} \quad u_C(0+) = 0$$

připomeňme rezonanční kmitočet a činitel jakosti

$$\frac{1}{LC} = \omega_r^2, \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC},$$

které doplníme o činitel tlumení

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_r}{2Q}$$

Laplaceův obraz rovnice popisující proud v obvodu při nulových počátečních podmínkách je

$$I(p)\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right) = \frac{U_0}{p}$$

$$I(p) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{(p^2 + 2\alpha p + \omega_r^2)} = \frac{U_0}{L}\frac{1}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}$$

Pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak je časový průběh dán vztahem

$$i(t) = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right)$$

kde $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}$

Pokud $\alpha = \omega_r,$ je $I(p) = \dfrac{U_0}{L}\dfrac{1}{(p^2 + 2\alpha p + \alpha^2)} = \dfrac{U_0}{L}\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$

a tomu odpovídající časový průběh

$$i(t) = \frac{U_0}{L}\, t\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Pokud $\lambda_{1,2}$ jsou dvě reálná čísla ($\alpha > \omega_r$), bude časový průběh

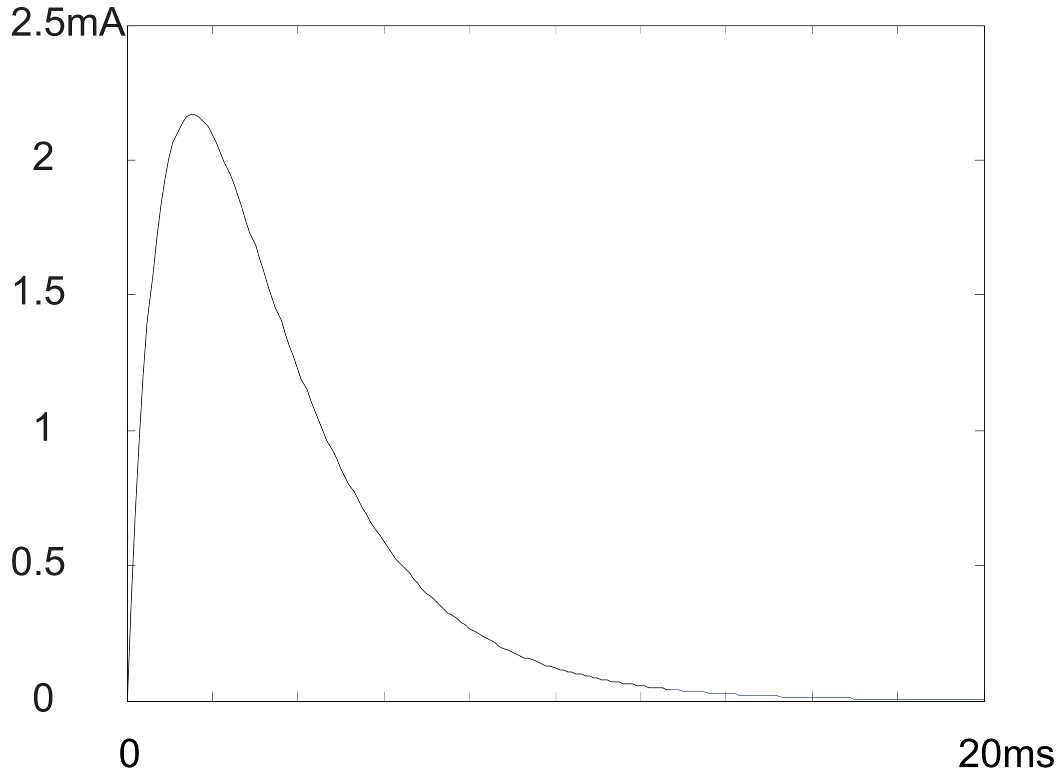
$$i(t) = \frac{U_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}}\left(\mathrm{e}^{t\sqrt{\alpha^2-\omega_r^2}} - \mathrm{e}^{-t\sqrt{\alpha^2-\omega_r^2}}\right)$$

Pokud $\lambda_{1,2}$ jsou dvě komplexně sdružená čísla ($\alpha < \omega_r$), bude

$$i(t) = \frac{U_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}}{2jL\sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}}\left(\mathrm{e}^{jt\sqrt{\omega_r^2-\alpha^2}} - \mathrm{e}^{-jt\sqrt{\omega_r^2-\alpha^2}}\right) =$$

$$= \frac{U_0 \mathrm{e}^{-\alpha\, t}}{L\sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}} \sin\left(t\sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}\right)$$

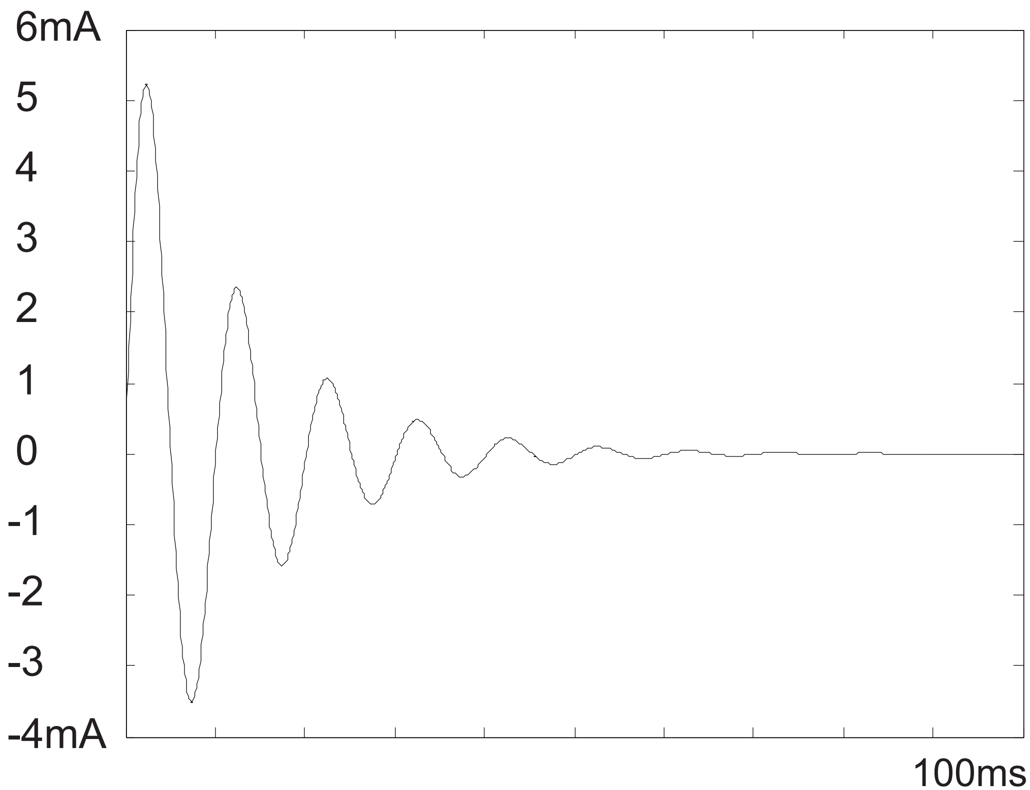
Odezva RLC obvodu ($R = 3500\,\Omega$) na skok napětí ($U_0 = 10\,\text{V}$)




```
t=[0:0.0001:0.02];
U=10;
R=3500;
C=1e-6;
L=2.533;
alfa=R/(2*L)
omegar=1/sqrt(L*C)
fr=omegar/(2*pi)
i=(U*exp(-alfa*t)/(2*L*sqrt(alfa^2-omegar^2))).
*(exp(t*sqrt(alfa^2-omegar^2))-exp(-t*sqrt(alfa^2-omegar^2)));
plot(t,i)
```

$$\omega_r = 628.32\,[\text{rad/s}] \;\; (\text{f}_\text{r} = 100\,[\text{Hz}]) \quad \alpha = 691\,[1/\text{s}]$$

Odezva RLC obvodu ($R = 400\,\Omega$) na skok napětí ($U_0 = 10\,\mathrm{V}$)




```
t=[0:0.0001:0.1 ];
U=10;
R=400;
C=1e-6;
L=2.533;
alfa=R/(2*L)
omegar=1/sqrt(L*C)
fr=omegar/(2*pi)
i=(U*exp(-alfa*t)/(2*L*sqrt(alfa^2-omegar^2))).
*(exp(t*sqrt(alfa^2-omegar^2))-exp(-t*sqrt(alfa^2-omegar^2)));
plot(t,i)
```

$$\omega_r = 628.32\,[\mathrm{rad/s}]\ \ (\mathrm{f_r} = 100\,[\mathrm{Hz}])\quad \alpha = 79\,[1/\mathrm{s}]$$

Pro $\alpha = \omega_r$ je obvod na mezi aperiodicity. Odezva nemá překmit proudu opačné polarity. Přechodný děj je nejkratší možný:

$$i(t) = \frac{U_0}{L}\, t\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$