VÝKON V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

Základní představa:

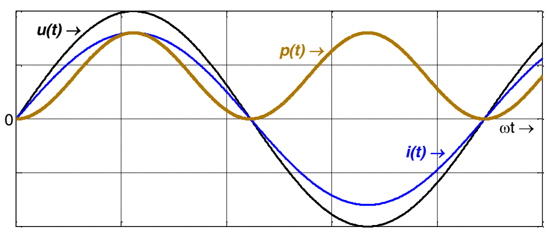
- **Rezistor**: proud, procházející rezistorem, ho zahřívá, energie, dodaná rezistoru, se tak nevratně mění na teplo
- **Kapacitor**: pokud ke kondenzátoru připojíme stejnosměrný zdroj napětí, bude proud, protékající obvodem kondenzátor nabíjet – kondenzátor akumuluje energii (ve formě elektrického pole), pokud obrátíme polaritu zdroje, začne se kondenzátor vybíjet zpět do zdroje, dodává energii
- **Induktor**: akumuluje energii formou magnetického pole

$\Rightarrow$ Jediným obvodovým prvkem, který vykonává užitečnou práci, je rezistor (může to být třeba i model mechanické zátěže motoru), kapacitory a induktory si ve střídavých obvodech periodicky vyměňují energii buď se zdroji, nebo mezi sebou navzájem

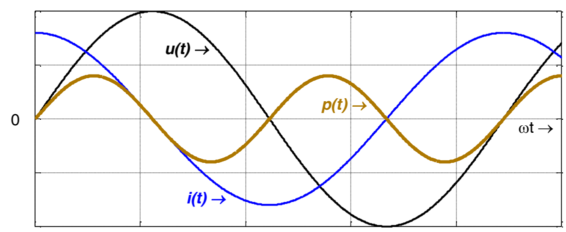
Okamžitý výkon *(obecná definice výkonu)*: $p(t) = u(t)i(t)$

Na rozdíl od odporového obvodu jsou napětí i proud harmonické funkce, pokud obvod obsahuje kapacitory a induktory, může být proud fázově posunut

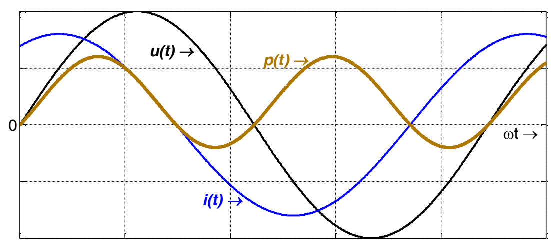
$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$



A) *u*(t), *i*(t) ve fázi



B) *i*(t) posunuto o $\frac{\pi}{2}$



C) *i*(t) posunuto o $\frac{\pi}{3}$

Obr. 1: Příklady časového průběhu okamžitého výkonu při různém fázovém posunu proudu vůči napětí

Okamžitý výkon mění svoji hodnotu v čase, může být kladný (obvod spotřebovává energii), nebo i záporný (obvod dodává energii zpět do zdroje), frekvence změn je dvojnásobná oproti frekvenci proudu a napětí.

Nás ale zajímají charakteristické hodnoty, které se nemění v čase ⇒ průměrná (střední) hodnota

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,\mathrm{d}t$$

ODVOZENÍ

Při použití obecných formulí (viz matematické tabulky, např. Bartsch)

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T U_m\sin(\omega t)\cdot I_m\sin(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{U_m I_m}{2T}\left[\int_0^T \cos(\varphi)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t}_{=0}\right] \frac{U_m I_m}{2T}\cos(\varphi)\,[t]_0^T = \\
&= \frac{1}{2}U_m I_m\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Protože (intuitivně lze odečíst přímo z časového průběhu – plocha nad a pod osou je stejná)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left[\cos(2\omega t)\cos(\varphi) - \sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right]\,\mathrm{d}t = \\
&= \cos(\varphi)\int_0^T \cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t - \sin(\varphi)\int_0^T \sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \cos(\varphi)\left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T - \sin(\varphi)\left[\frac{-\cos(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T = \\
&= \frac{\cos(\varphi)}{2\omega}\left[sin(2\frac{2\pi}{T}T) - sin(0)\right] + \frac{\sin(\varphi)}{2\omega}\left[cos(2\frac{2\pi}{T}T) - cos(0)\right] = 0
\end{aligned}$$

$\cos(\varphi)$ posouvá časový průběh okamžitého výkonu $\cos(2\omega t+\varphi)$ nad, nebo pod osu, určuje jeho stejnosměrnou složku

Toto je výkon, nevratně dodaný ze zdroje do obvodu,

činný výkon

$$\boxed{P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = U I \cos\varphi} \qquad \text{[W]}$$

U, *I* jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, pro harmonický průběh $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, viz první přednáška.

Maximální výkon je do obvodu dodán, pokud $\varphi = 0$, tedy napětí a proud jsou ve fázi (obr. 1a). Tedy do obvodu, který obsahuje pouze rezistory.

Na obr. 1b je případ, kdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ideální induktor). Činný výkon je zde nulový. Žádné teplo, žádné světlo, žádná práce. Je ale zřejmé, že vodiči teče proud, a **na tento proud musí být rozvodná síť dimenzována**!!! Proto je potřeba definovat **zdánlivý výkon**, tedy celkovou energii, přenesenou za jednotku času oběma směry. Je dán efektivními hodnotami napětí a proudu

zdánlivý výkon

$$\boxed{S = U I = \frac{1}{2} U_m I_m} \qquad \text{[VA]}$$

Výměna energie mezi zdroji, kapacitory a induktory je dána geometrickým rozdílem mezi zdánlivým a činným výkonem, ale pozor, nejedná se o obyčejné odčítání, protože $1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$

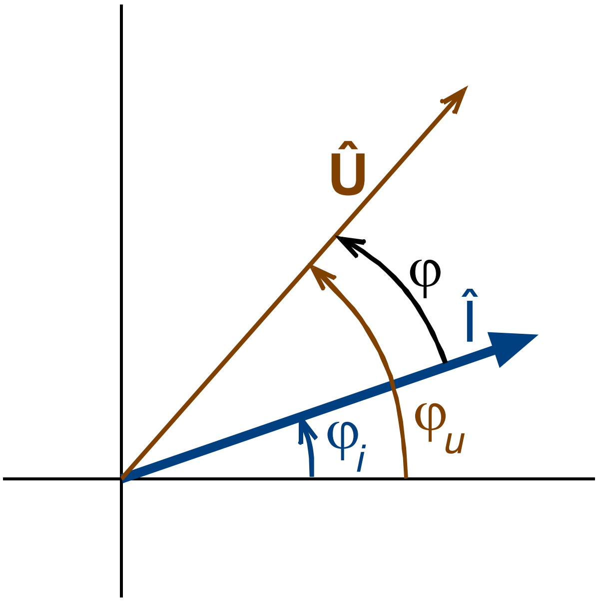
jalový výkon

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin\varphi = U I \sin\varphi} \qquad \text{[var]}$$

a platí

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

I když ve všech třech případech má jednotka stejný fyzikální rozměr, jsou výkony formálně rozlišeny, tak, aby bylo na první pohled zřejmé, o jaký výkon se jedná (Watty u činného, volt ampéry reaktanční u jalového, Volt Ampéry u zdánlivého).



Pozor! Úhel φ je fázový posun mezi napětím a proudem, měřeno od napětí k proudu, fázový posun proudu se odečítá od fázového posunu napětí
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Výkony, vyjádřené z fázorů

Vzhledem k tomu, že harmonické funkce napětí a proudu můžeme transformovat na fázory, lze výkon definovat i v prostoru fázorů. Záporné znaménko fázovéh posunu proudu vyjádříme velmi snadno operací komplexně sdruženého čísla $\mathbf{I}^* = Ie^{-j\varphi_i}$.

Souvislost mezi komplexním výkonem, a činným a jalovým výkonem vyjádřeným z reálných funkcí

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{2}\mathbf{U}_m\mathbf{I}_m^* = \frac{1}{2}U_mI_m \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2}U_mI_m \cdot e^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = \\ &= \frac{1}{2}U_mI_m \cdot e^{j\varphi}\end{aligned}$$

Pokud vyjádříme komplexní exponenciální funkci pomocí Eulerovy věty $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$, bude

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}U_mI_m \cdot e^{j\varphi} = \frac{1}{2}U_mI_m(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

A tedy

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}U_mI_me^{j\varphi}\right\} = \frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi$$
$$Q = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}U_mI_me^{j\varphi}\right\} = \frac{1}{2}U_mI_m\sin\varphi$$

Komplexní výkon

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}\mathbf{U}_m\mathbf{I}_m^* = P + jQ}$$

Činný výkon

$$\boxed{P = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{U}_m\mathbf{I}_m^*\right\}}$$

Jalový výkon

$$\boxed{Q = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{S}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{U}\mathbf{I}^*\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{U}_m\mathbf{I}_m^*\right\}}$$

Výkony na jednotlivých obvodových prvcích

Do třetice, vzhledem k jejich fyzikálnímu významu, můžeme výkony spočítat přímo na jednotlivých obvodových prvcích:

R – teplo na odporu

$$\boxed{P_R = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$

C – proud se předbíhá o $\frac{\pi}{2}$ před napětím $\Rightarrow$ vždy **záporné** znaménko

$\sin(0 - \frac{\pi}{2}) = -1$

$$\boxed{Q_C = -UI = -X_C \cdot I \cdot I = \frac{-1}{\omega C}I^2 = -U^2\omega C}$$

L – proud se zpožďuje o $\frac{\pi}{2}$ za napětím $\Rightarrow$ vždy **kladné** znaménko

$\sin(0 - \frac{-\pi}{2}) = 1$

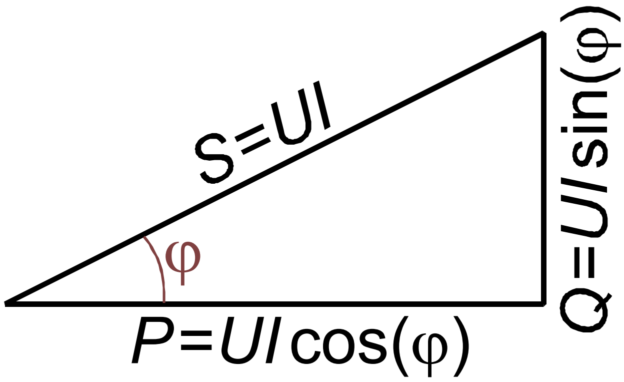
$$\boxed{Q_L = UI = X_L \cdot I \cdot I = \omega L I^2 = \frac{U^2}{\omega L}}$$

V tomto případě je ale potřeba znát napětí, resp. proud pro každý jednotlivý obvodový prvek (R, L, C) zvlášť! Hodí se proto pouze pro jednoduché obvody obsahující malý počet prvků.

Trojúhelník výkonů

Vzhledem k tomu, že činný výkon představuje reálnou složku komplexního výkonu a jalový výkon jeho imaginární část, je možné kreslit fázorový diagram výkonů.

Obdobně, v reálném prostoru, vzhledem k tomu, že činný výkon je kosinovou složkou a jalový sinovou složkou výkonu, lze výkony kreslit do trojúhelníka:



Úhel φ mezi činným a zdánlivým výkonem je fázový rozdíl mezi napětím a proudem.

Pokud je zdroj napětí zatížen impedancí $\mathbf{Z}$, pak úhel φ je přímo úhlem impedance, neboť

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U}{Z}e^{j(\varphi_u - \varphi)}$$

a

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{I}^* = Ue^{j\varphi_u} \cdot \frac{U}{Z}e^{j(-\varphi_u + \varphi)} = \frac{U^2}{Z}e^{j(\varphi_u - \varphi_u + \varphi)} = \frac{U^2}{Z}e^{j\varphi}$$

Účiník

$$\boxed{\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi}$$

Protože pouze činný výkon vykonává práci, zatímco zdánlivý výkon je celková energie přenesená vodiči za jednotku času, je účiník **mírou využití energetického zařízení**. 1 znamená, že veškerý výkon, dodaný zdrojem, je využit, 0 znamená, že vodiči je pouze bez užitku přenášená energie ze zdroje do zátěže, a zpět. Takto definován nemá žádnou jednotku, někdy je násoben 100 a udáván v %.

Poznámka: Účiník se často nazývá $\cos \varphi$, „kosinus fí“, nebo jen „kosinus“. To platí ale pouze u harmonických časových průběhů, tedy u lineárních obvodů. U nelineárních obvodů (např. spínané zdroje moderních spotřebičů – počítačů, monitorů a TV panelů, DVD přehrávačů a rekordérů, …) toto označení neplatí. Mezi různými časovými průběhy napětí a proudu nelze žádný jednoznačný úhel φ definovat. To uvidíme příští semestr, u periodického neharmonického ustáleného stavu (PNUS), kde budeme zkoumat nesinusové periodické časové průběhy. Podobně je tomu i u trojfázových obvodů později v tomto semestru.

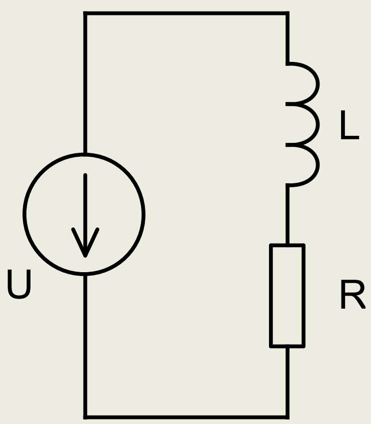
Kompenzace účiníku

Vzhledem k tomu, že přenosová soustava musí být dimenzovaná na zdánlivý výkon *S* (vyšší protékající proud!), měl by být účiník obvodu co nejvyšší (obvykle > 0.90). Velcí spotřebitelé proto musí buď kompenzovat jalový výkon svých spotřebičů (obvykle motorů), nebo platit za „odebraný“ zdánlivý výkon, vyjádřený z účiníku. Domácnosti dosud platí pouze za odebraný činný výkon. Naštěstí, protože účiník moderních spotřebičů ve stand-by režimu může být hluboko pod 0.1. Např. moderní plochý TV panel může mít činný výkon P = 3 W, ale |Q| > 50 Var. Tento jalový výkon je kapacitního charakteru (kondenzátory ve spínaném zdroji).

Jsou dva různé způsoby, jak kompenzovat účiník:

a) přímo u spotřebiče – ke spotřebiči je paralelně připojen kompenzační prvek, který má stejný jalový výkon, ale s opačným znaménkem tak, že si kompenzační prvek vyměňuje energii s obvodem (je v rezonanci); příkladem je zářivka (viz poznámka níže)

b) kompenzována je celá výrobní hala, nebo továrna u připojení k distribuční soustavě – jsou připojovány nebo odpojovány bloky kondenzátorů (menší výkony), nebo přebuzené nezatížené synchronní motory („synchronní kondenzátor“); nevýhody kondenzátorů – citlivé na nelineární zátěž (proudy obsahují sinusovky s vysokými kmitočty – velké proudy, tekoucí kondenzátory → přehřátí ⇒ zničení), přechodné děje při připojení, nutno vybít akumulovaný náboj při odpojení, omezený výkonový rozsah



Příklad 1:

Spotřebič je tvořen sériovou spojením cívky *L* a rezistoru *R*. Úkolem je kompenzovat účiník obvodu.

$L = 0.42$ H

$R = 68\ \Omega$

$U = 230$ V, 50 Hz

Proud, odebíraný ze zdroje:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{R + j\omega L} = \frac{230}{68 + j \cdot 100 \cdot \pi \cdot 0.42} = 0.71 - 1.377j = 1.55e^{-j1.095}$$

Komplexní výkon:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = 230 \cdot 1.55e^{j1.095} = 356.5e^{1.095j} = 163.37 + 316.71j$$

Činný výkon:

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Re}\{\mathbf{S}\} = 163.37 \text{ W} \\ &= UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) = 230 \cdot 1.55 \cdot \cos(1.095) = 163.37 \text{ W} \\ &= RI^2 = 68 \cdot 1.55^2 = 163.37 \text{ W} \end{aligned}$$

Jalový výkon:

$$\begin{aligned} Q &= \mathrm{Im}\{\mathbf{S}\} = 316.71 \text{ var} \\ &= UI\sin(\varphi_u - \varphi_i) = 230 \cdot 1.55 \cdot \sin(1.095) = 316.71 \text{ var} \\ &= \omega L \cdot I^2 = 100 \cdot \pi \cdot 0.42 \cdot 1.55^2 = 316.71 \text{ var} \end{aligned}$$

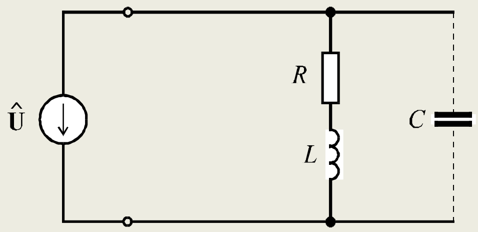
Zdánlivý výkon:

$$S = |\mathbf{S}| = 356.5 \text{ VA}$$

Účiník:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{163.7}{356.5} = 0.458 = 45.8 \text{ \%}$$

K vykompenzování účiníku obvodu budeme potřebovat prvek se záporným jalovým výkonem – kondenzátor, který připojíme paralelně.



Jalový výkon kondenzátoru $Q_C \stackrel{!}{=} -316.71 \text{ var} = -U^2 \cdot \omega C$

Odtud $C = \dfrac{-Q_C}{U^2 \cdot \omega} = \dfrac{316.71}{230^2 \cdot 100 \cdot \pi} = 19.07\ \mu\text{F}$

Celková impedance obvodu $\mathbf{Z} = \dfrac{\frac{1}{j\omega C} \cdot (R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)} \doteq 324\ \Omega$ je **reálná**.

Celkový jalový výkon je 0 var, *P* = *S* = 163.37 [W / VA], účiník $\lambda \to 1$.

Celkový proud, odebíraný ze zdroje $\mathbf{I} = 0.71$ A - **napájecí vodiče jsou tedy zatěžovány méně jak polovičním proudem – přesněji, efektivní hodnota proudu, odebíraného ze zdroje po kompenzaci je 45.8 % efektivní hodnoty proudu, odebíraného ze zdroje nevykompenzovaným obvodem.**

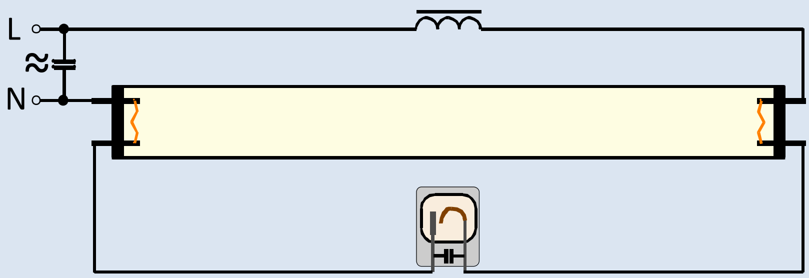
Pokud účiník vyjádříme v procentech, pak také

$$\lambda = \frac{I_k}{I},$$

kde I_k je proud, odebíraný kompenzovaným obvodem ($\lambda = 1$)
I proud, odebíraný stejným obvodem bez kompenzace účiníku.

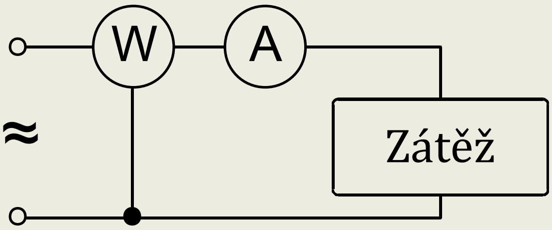
Poznámka:
Uspořádání obvodu odpovídá zapojení obvodu klasické zářivky. Ten obsahuje celkem 4 prvky:

- Zářivku – zářivka je skleněná trubice, která má na každé straně v patici zasazenou žhavenou wolframovou elektrodu, pokrytou oxidy baria, stroncia a vápníku. Elektroda, připojená přes tlumivku na fázový vodič, emituje při teplotě asi 700 °C elektrony. Trubice je naplněna směsí argonu (400 Pa) a rtuťových par (0.6 Pa). Letící elektrony předávají část své energie molekulám plynu, kde dojde k přeskoku elektronů na vyšší elektronovou hladinu. Při návratu zpět emitují ultrafialové záření. To je převedeno na viditelné luminoforem, který je nanesen na vnitřní straně trubice. K výboji v trubici dochází typicky při napětí 100 – 160 V podle její délky. Napětí je proto potřeba omezit. Za druhé, elektrický odpor plasmového výboje v trubici je záporný (čím větší elektrický proud, tím větší ionizace plynu a tím menší elektrický odpor – bez omezovacího prvku by proud, tekoucí trubicí rostl a mohl by vést až k jejímu zničení). Jako omezovač elektrického proudu (anglicky ballast) slouží tlumivka. K zapálení výboje je ale potřeba podstatně větší napětí.
- Startér – Jeho úkolem je zapálit výboj v zářivce. Je tvořen malou skleněnou baňkou, naplněnou argonem a xenonem, ve které je bimetalová elektroda. Ta je normálně rozpojená. Po zapnutí napájecího napětí zářivka nesvítí, její elektrický odpor je obrovský. V baňce startéru vznikne doutnavý výboj, který zahřívá bimetalovou elektrodu, která se ohýbá, až zapne a způsobí zkrat zářivkové trubice. V tomto okamžiku začne tlumivkou protékat relativně velký proud, který žhaví elektrody zářivky. Plyn ve startéru se ochlazuje, bimetalový kontakt se rozepne, a protože proud, tekoucí tlumivkou musí být konstantní, skokově vzroste napětí na tlumivce a tedy i zářivce. To zapálí výboj, klesne elektrický odpor zářivky, a menší napětí již není schopno udržet výboj v baňce startéru.
- Tlumivku – Jedna její funkce již byla zmíněna – omezovač proudu, protékajícího trubicí. Druhou funkcí je zapálení výboje, jak je popsáno u startéru.
- Kondenzátor – jeho jedinou funkcí je kompenzace účiníku celého obvodu.



Příklad 2:

Neznámý obvod je napájen z elektrické rozvodné soustavy *U* = 230 V, 50 Hz. Měřením jsme zjistili, že činný výkon, odebíraný ze sítě *P* =1200 W, a odebíraný proud *I* = 9.5 A. Proud se zpožďuje za napětím. Navrhněte vhodnou kompenzaci účiníku obvodu.



Řešení:

Zdánlivý výkon $S = UI = 230 \cdot 9.5 = 2185\ \mathrm{VA}$

Účiník: $\lambda = \dfrac{P}{S} = \dfrac{1200}{2185} = 0.549 = 54.9\ \%$

Jalový výkon $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2185^2 - 1200^2} = 1826\ \mathrm{var}$

Vzhledem k tomu, že se proud zpožďuje za napětím, má obvod indukční charakter a ke kompenzaci použijeme kapacitor, který zapojíme paralelně k zátěži.

Jalový výkon na kompenzačním kondenzátoru

$$Q_C = \frac{-U^2}{X_C} = \frac{-U^2}{\frac{1}{\omega C}} = -U^2\omega C = -1826\ \mathrm{var}$$

Odtud kapacita

$$C = \frac{Q_C}{-U^2\omega} = \frac{-1826}{-230^2 \cdot 100 \cdot \pi} = 109.87\ \mu\mathrm{F}$$

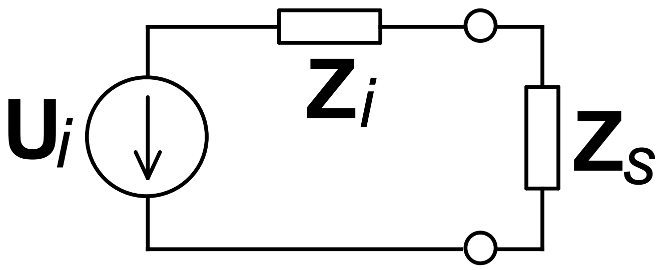
Celkový proud, odebíraný ze zdroje $I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{1200}{230} = 5.217\ \mathrm{A}$, tedy 54.9 % původně odebíraného proudu.

Kondenzátorem protéká proud $I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C = 7.94\ \mathrm{A}$.

Výkonové přizpůsobení v harmonickém ustáleném stavu

Anglicky *power matching*, nebo velmi výstižně *impedance matching*.

☞ Obvod je výkonově přizpůsoben, pokud zdroj dodává do obvodu **maximální možný činný výkon**.



ODVOZENÍ

Činný výkon, dodaný do zátěže $\mathbf{Z}_S$:

$$\begin{aligned} P_S &= \mathrm{Re}\{\mathbf{U}_S\mathbf{I}_S^*\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{U}_i\frac{\mathbf{Z}_S}{\mathbf{Z}_i+\mathbf{Z}_S}\cdot\left(\frac{\mathbf{U}_i}{\mathbf{Z}_i+\mathbf{Z}_S}\right)^*\right\} = \\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{U}_i\mathbf{U}_i^*\mathbf{Z}_S}{(\mathbf{Z}_i+\mathbf{Z}_S)(\mathbf{Z}_i+\mathbf{Z}_S)^*}\right\} = \mathrm{Re}\left\{|\mathbf{U}_i|^2\frac{\mathbf{Z}_S}{|\mathbf{Z}_i+\mathbf{Z}_S|^2}\right\} = \\ &= U_i^2\frac{R_S}{(R_i+R_S)^2+(X_i+X_S)^2} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{Z}_i = R_i + jX_i$, $\mathbf{Z}_S = R_S + jX_S$.

reaktanční složka pro odporovou složku snižuje proud a tedy i činný výkon – viz předchozí rovnice

⇒ musí platit $X_i + X_S = 0$ (vp1)

Vyjádřením parciální derivace a jejím položením rovno nule najdeme extrém funkce

$$\frac{\partial P_S}{\partial R_S} = U_i^2\frac{(R_i+R_S)^2-2R_S(R_i+R_S)}{(R_i+R_S)^4} = U_i^2\frac{R_i^2-R_S^2}{(R_i+R_S)^4} \stackrel{!}{=} 0$$

Odtud

$$R_i = R_S \qquad \text{(vp2)}$$

Ze vztahů (vp1) a (vp2) vyplývá

$$\boxed{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_S^*}$$

$$P_{S_{max}} = \frac{U_i^2}{4R_S}$$