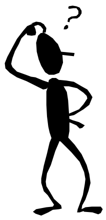
HARMONICKÝ USTÁLENÝ STAV - FÁZOR, IMPEDANCE

Úvodem

- Fyzikální popis induktoru a kapacitoru vede na integrodiferenciální rovnice, jejichž řešení je značně obtížné, zvláště v případě soustav rovnic.
  Příklad – uvažujme sériovou kombinaci kapacitou C a rezistoru R, napájené harmonickým zdrojem napětí $u(t) = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Pro obvod dostaneme rovnici
  $u(t) = Ri(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau \pm u_{C(0+)}$
  Tuto rovnici je potřeba derivovat a následně řešit diferenciální rovnici. Jejím řešením je rovnice
  $i(t) = \left[\dfrac{U_m}{R} - \dfrac{U_m \omega C \sin(\pi - \tan^{-1}(\omega RC))}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\right] e^{\frac{-t}{RC}} + \dfrac{U_m \omega C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \pi - \tan^{-1}(\omega RC))$
  Tímto postupem se budeme zabývat příští semestr.



Co s tím?
– vhodnou transformací převést integrály a derivace na násobení a dělení, kdy můžeme použít např. maticový zápis řešení soustavy rovnic (Gauss, Cramér, inverzní matice, …)

Fázor

☞ **Pokud nás nezajímá přechodná složka** (člen obsahující $e^{\frac{-t}{RC}}$, který za velmi krátkou dobu $\doteq 3RC$ zaniká), pak lze využít Eulerův vzorec:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

My potřebujeme nahradit komplexním číslem časový průběh napětí

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Funkce sin je imaginární částí polárního tvaru komplexního čísla

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{U_m\left[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\right]\right\} = \mathrm{Im}\left\{U_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$

Grafickou reprezentací je vektor v komplexní rovině, který se otáčí kolem počátku úhlovou rychlostí ω proti směru hodinových ručiček. V čase *t* je tak tento vektor otočen proti reálné ose o úhel $\omega t + \varphi$. *Animaci vektoru si můžete zobrazit programem na adrese http://amber.feld.cvut.cz/vyu/eo1/labs/files/HUS_Demo.ex_. Po stažení soubor přejmenujte na HUS_Demo.exe.*

Protože všechny obvodové veličiny se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí ω, není nutné neustále opisovat výraz $e^{j\omega t}$. Komplexní číslo se tak zjednoduší na tvar

$$\boxed{\mathbf{U}_m = U_m e^{j\varphi}}$$

Toto komplexní číslo nazveme **fázor napětí**.

Značení:

- V tištěném textu se obvykle používá velké tučné písmo: $\mathbf{U}, \mathbf{I}, \ldots$
- V psaném textu akcentovaná kurzíva $\widehat{U}, \widehat{I}, \ldots$ (lze se setkat i s jinými typy akcentů $\widetilde{U}, \bar{U}, \ldots$)

Používáme dva typy fázorů – **fázory v měřítku maximálních hodnot** a **fázory v měřítku efektivních hodnot**. Časový průběh je udán amplitudou U_m, u elektrické zásuvky nás ale nezajímá, že amplituda sinusovky je 325 V, ale že její efektivní hodnota je 230 V. Jediný rozdíl bude při výpočtu výkonů.

Fázor v měřítku efektivních hodnot $\mathbf{U} = U e^{j\varphi} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = \dfrac{\mathbf{U}_m}{\sqrt{2}}$

Impedance, admitance

ODVOZENÍ

Mezi napětím a proudem na kapacitoru platí obecný vztah $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

Pro harmonické napětí dostaneme

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[U_m \sin(\omega t)\right] = U_m C\omega \cos(\omega t) = U_m C\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Transformací na fázor a s využitím vztahu $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

$$\mathbf{I_m} = \mathbf{U_m} C\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = \mathbf{U_m} C\omega j.$$

Mezi **fázorem** proudu a **fázorem** napětí tak dostáváme **lineární** vztah, který je formálně shodný s Ohmovým zákonem známým z odporových obvodů, kde $I = GU$, kde *G* je vodivost.

Výraz $\widehat{Y} = j\omega C$ nazveme v harmonickém ustáleném stavu **admitance** kapacitoru.

ODVOZENÍ

Pro napětí na kapacitou můžeme odvodit

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t I_m \sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau + u_C(0) = \frac{I_m}{C}\left[\frac{-\cos(\omega\tau)}{\omega}\right]_0^t + u_C(0) \\ &= \frac{I_m}{\omega C}[1 - cos(\omega t)] + u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C}[1 - sin(\omega t + \frac{\pi}{2})] + u_C(0) \end{aligned}$$

Tento časový průběh obsahuje dva členy – stejnosměrnou složku $\frac{I_m}{\omega C} + u_C(0)$ a harmonický průběh. Můžeme ho považovat za **superpozici** dvou nezávislých zdrojů – stejnosměrného a střídavého. Pouze střídavý můžeme transformovat s použitím fázoru:

$$\mathbf{U}_m = \frac{-\mathbf{I}_m}{\omega C}e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{-j\mathbf{I}_m}{\omega C} = \frac{\mathbf{I}_m}{j\omega C}$$

Výraz $\mathbf{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ nazveme v harmonickém ustáleném stavu **impedance** kapacitoru.

Obdobně lze odvodit impedanci / admitanci induktoru.

Pro jednotlivé obvodové prvky můžeme vše shrnout do tabulky:

Obvodový prvek				
R	odpor	R	vodivost	$G = \frac{1}{R}$
C	impedance	$\frac{1}{j\omega C}$	admitance	$j\omega C$
L	impedance	$j\omega L$	admitance	$\frac{1}{j\omega L}$

Vztah mezi fázory napětí a proudu na obvodových prvcích:

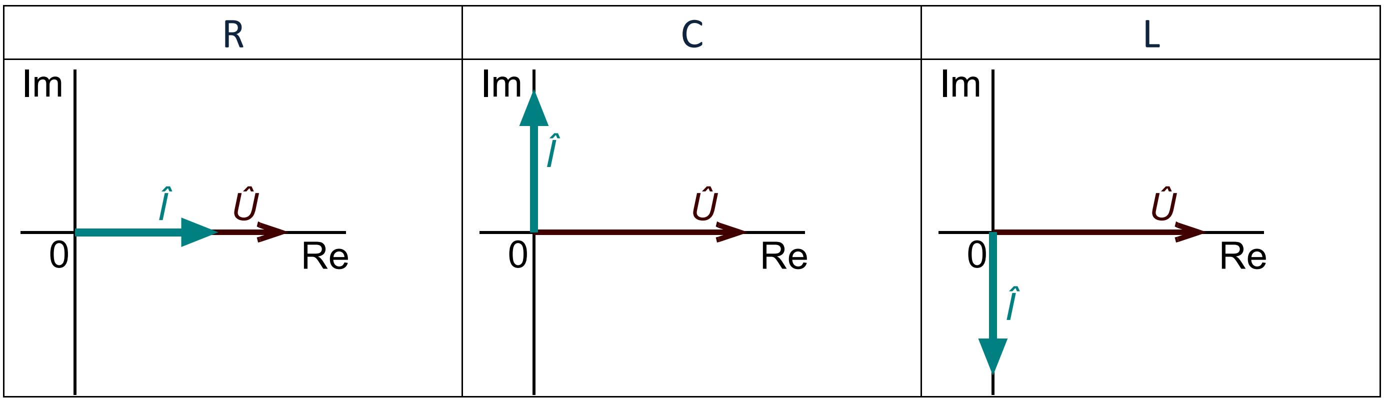
Obvodový prvek		
R	$\mathbf{U} = R\mathbf{I}$	$\mathbf{I} = G\mathbf{U}$
C	$\mathbf{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{U}$
L	$\mathbf{U} = j\omega L\mathbf{I}$	$\mathbf{I} = \dfrac{1}{j\omega L}\mathbf{U}$

V uvedených vztazích j představuje **fázový posun** mezi proudem a napětím (viz předchozí odvození): $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$. Fakticky, v časové oblasti, se jedná o **posun časový**! ($\frac{\pi}{2}$ je $\frac{1}{4}$ periody).

- Na rezistoru jsou napětí i proud ve fázi.
- Na kapacitoru se tak proud předbíhá před napětím o $\frac{\pi}{2}$, resp. napětí se zpožďuje za proudem – nejdříve proud, pak napětí.
  Vzpomeňte „cisternový“ model kapacitoru – napětí je výška hladiny vody, proud je přítok vody. Abych měl v nádrži určitou hladinu vody, nejdříve ji tam musím nalít.
- Na induktoru se naopak napětí předbíhá před proudem o $\frac{\pi}{2}$, resp. proud se zpožďuje za napětím – nejdříve napětí a pak proud.
  Pokud chci napumpovat vodu, nebo třeba roztlačit vozík, musím nejprve pořádně napnout svaly…

V komplexní rovině je časový (fázový) posun po transformaci reprezentován otočením vektoru proti směru hodinových ručiček, počátkem otáčení (referenční 0) je kladná reálná poloosa – viz fázor.

V komplexní rovině pak můžeme uvedené poučky reprezentovat graficky:



Častou chybou bývá nepochopení rozdílu mezi časovým průběhem a fázorem.

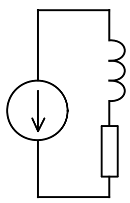
Transformací na fázor (komplexní číslo) jsme se přesunuli do zcela jiného světa. Ze světa funkcí do světa komplexních čísel.

Výrazy, jako $i(t) = j\omega C\mathbf{U}$, $\mathbf{P} = \dfrac{U_{2m}\sin(\omega t+\varphi_2)}{U_{1m}\sin(\omega t+\varphi_1)}$ jsou zcela nesmyslné !!!

Reaktance

Uvažujme následující příklad:

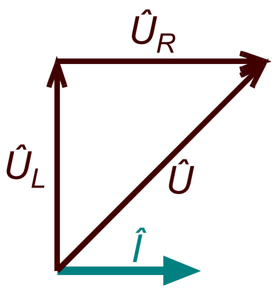
Rezistor s odporem *R* zapojíme do série s induktorem s indukčností *L*. Připojíme zdroj napětí s efektivní hodnotou U = 230 V. Na rezistoru je napětí $U_R = 120\,\mathrm{V}$. Jaké napětí je na induktoru?



$U_L = U - U_R = 230 - 120 = 110\,\mathrm{V}$?

Chyba! To by platilo u rezistorů. A co fázový posun?

Oběma prvky protéká stejný proud *(je to „jedna trubka“)*. Napětí na rezistoru je ve fázi s proudem, ale u induktoru se před proudem předbíhá o $\frac{\pi}{2}$. Pokud napětí nakreslíme tak, aby na sebe navazovala stejně, jako součástky v obvodu, dostaneme pravoúhlý trojúhelník:



Známe přeponu a jednu odvěsnu trojúhelníka. Pomocí Pythagorovy věty můžeme snadno spočítat délku zbývající odvěsny

$$U_L = \sqrt{U^2 - U_R^2} = \sqrt{230^2 - 120^2} \doteq 196.2\,\mathrm{V}.$$

Díky fázovému posunu tak neplatí jednoduchá „lineární“ matematika a na reaktančních prvcích může být napětí mnohem vyšší, nežli bychom mohli očekávat ze zkušenosti s odporovými obvody.

Pokračujme v našem příkladu dále. Víme, že na rezistoru má být napětí $U_R = 120\,\mathrm{V}$. Dejme tomu, že tepelný výkon rezistoru má být $P_R = 600\,\mathrm{W}$.

Obvodem pak musí téci proud $I = \frac{P_R}{U_R} = \frac{600}{120} = 5\,\mathrm{A}$. Jaká musí být velikost indukčností, aby na rezistoru bylo požadovaných 120 V?

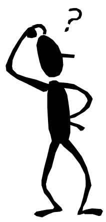
Známe napětí na indukčnosti - $U_L \doteq 196.2\,\mathrm{V}$. Víme, že induktorem teče proud 5 A. Mezi napětím a proudem na induktoru platí vztah $\mathbf{U} = j\omega L\mathbf{I}$. V tomto případě nás ale nezajímá, že se napětí předbíhá před proudem o $\frac{\pi}{2}$. Mezi **velikostí** napětí a proudu pak platí vztah

$$U_L = \omega L I = X_L I$$

Výraz

$$X_L = \omega L$$

nazveme **reaktancí** induktoru. Její jednotkou je Ω.
Odtud pak snadno vypočteme indukčnost $L = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{196.2}{100 \cdot \pi \cdot 5} \doteq 0.125\,\mathrm{H}$.



Můžeme napsat $U = I(R + X_L)$?

Ne, nejsme u odporových obvodů. Tento výraz tvrdí, že na cívce je 110 V. My ale už víme, že to není pravda. Jak je to tedy správně?

$$\mathbf{U} = \mathbf{I}(R + jX_L) = \mathbf{I}(R + \mathbf{Z}_L)$$

Jak se převádí složkový tvar komplexního čísla na exponenciální? $\mathbf{U} = \sqrt{(\mathrm{Re}\{\mathbf{U}\})^2 + (\mathrm{Im}\{\mathbf{U}\})^2} \cdot e^{j \arctan \frac{\mathrm{Im}\{\mathbf{U}\}}{\mathrm{Re}\{\mathbf{U}\}}}$. Ano, zde se skrývá potřebná Pythagorova věta!

Použít reaktanci pro vyjádření velikosti napětí a proudu má smysl pouze na jednom reaktančním prvku (induktor, kapacitor), ne na jejich kombinaci s odporem.

☞ **Reaktance je imaginární část impedance.**

Terminologie:

$R = \mathrm{Re}\{\mathbf{Z}\}$	reaktance,	$X = \mathrm{Im}\{\mathbf{Z}\}$	reaktance,
$G = \mathrm{Re}\{\mathbf{Y}\}$	konduktance,	$B = \mathrm{Im}\{\mathbf{Y}\}$	susceptance

Obvodový prvek	reaktance X	susceptance B
C	$\dfrac{-1}{\omega C}$	ωC
L	ωL	$\dfrac{-1}{\omega L}$

Tak, jako jsme u odporů mohli vypočítat celkový odpor sériového a / nebo paralelního spojení odporů, v harmonickém ustáleném stavu můžeme vyjádřit celkovou impedanci

$$\mathbf{Z} = R + jX.$$

Fázor proudu, který teče naším obvodem, je

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{R + j\omega L} = \frac{230}{24 + j \cdot 100 \cdot \pi \cdot 0.125} = 2.606 - 4.264j = 5\,e^{-1.02j}\ \mathrm{A},$$

a fázory napětí na rezistoru a na induktoru jsou

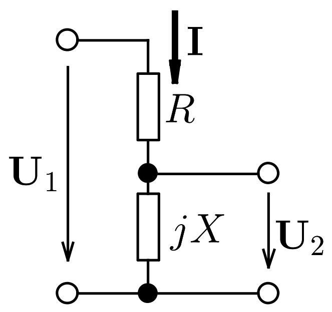
$$\mathbf{U}_R = R\mathbf{I} = 24 \cdot 5\,e^{-1.02j} = 120\,e^{-1.02j}\ \mathrm{V},$$

$$\mathbf{U}_L = j\omega L \cdot \mathbf{I} = j\,100\pi\,0.125 \cdot 5\,e^{-1.02j} = 196.25\,e^{0.549j}\ \mathrm{V}.$$

Elementární obvody

– dělič napětí

- 2 nebo více pasivních obvodových prvků zapojených sériově
- společná obvodová veličina – proud



$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}_1}{R + jX}$$

$$\mathbf{U}_2 = jX \cdot \mathbf{I} = jX\frac{\mathbf{U}_1}{R + jX}$$

$$\boxed{\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1\frac{jX}{R + jX}}$$

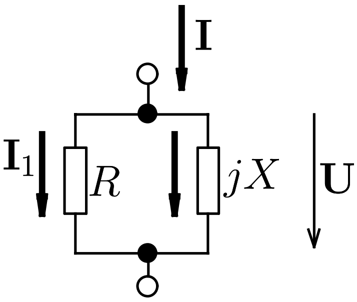
Snadno lze rozšířit pro *N* prvků: $$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_1 \frac{jX_k}{\sum_{m=1}^{M} R_m + \sum_{n=1}^{N} jX_n},$$

na reaktančním prvku, resp. $$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_1 \frac{R_k}{\sum_{m=1}^{M} R_m + \sum_{n=1}^{N} jX_n}$$

na rezistoru.

– dělič proudu

- 2 nebo více pasivních obvodových prvků zapojených paralelně
- společná obvodová veličina – napětí



$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} = \frac{R \cdot jX}{R + jX}\mathbf{I}$$

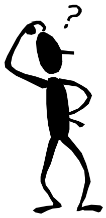
$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}}{R} = \mathbf{I}\frac{R \cdot jX}{R + jX}\frac{1}{R}$$

$$\boxed{\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}\frac{jX}{R + jX}}$$

Rozšíření pro *N* obvodových prvků je komplikovanější –

$$\mathbf{Z} = \left(\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{R_m} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{jX_n}\right)^{-1} = \left(\sum_{m=1}^{M} G_m + \sum_{n=1}^{N} jB_n\right)^{-1}$$

Připadají Vám vzorce pro oba děliče povědomé? – měly by, od těch odporových se liší pouze tím, že zde počítáme s komplexními čísly. Obdobné je to se všemi metodami a teorémy platnými pro odporové obvody – metodou postupného zjednodušování, Kirchhofovými zákony, Théveninovým a Nortonovým teorémem, …



Co když spojíme dva zdroje sériově, nebo paralelně?

Spojit paralelně dva ideální zdroje napětí, nebo sériově dva ideální zdroje proudu o různé velikosti je samozřejmě nesmysl *(jak by to asi dopadlo?)*.

Můžeme ale spojit dva zdroje napětí sériově:

$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega_1 t)$

$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega_2 t + \varphi)$.

Jaké bude výsledné napětí?

- Pokud bude $\omega_1 \neq \omega_2$ a platí $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2}$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$, pak to bude nesinusový časový průběh, který se bude opakovat s periodou $T = k_2 T_1 = k_1 T_2$.
- Pokud bude $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, pak dostaneme opět sinusový průběh. Buď můžeme použít součtové vzorce pro funkci sin, a pracně dojít k výsledku, nebo využít fázory a jednoduše je sečíst.

Př.: $u_1(t) = 20 \sin(100t)$, $u_2(t) = 30 \sin(100t + \dfrac{\pi}{4})$.

$\mathbf{U}_1 = 20\,\mathrm{V}$, $\mathbf{U}_2 = 30 e^{j\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{V}$.

$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = 20 + 30 e^{j\frac{\pi}{4}} = 41.213 + 21.213 j = 46.352\, e^{j0.475}$

$u(t) = 46.352 \sin(100t + 0.475)\,\mathrm{V}$

Sčítat můžeme pouze fázory napětí (nebo proudů) se stejnou frekvencí ω!