IMPULSNÍ A PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA, STABILITA.

Jednotkový impuls (Diracův impuls, Diracova funkce, funkce delta) – někdy též distribuce delta – z matematického hlediska nejde o pravou funkci (přesný popis teorie distribucí)

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad \text{pro} \quad t \neq t_0$$
$$\rightarrow \infty \qquad \text{pro} \quad t = t_0$$

Jednotkový impuls musí splňovat integrál

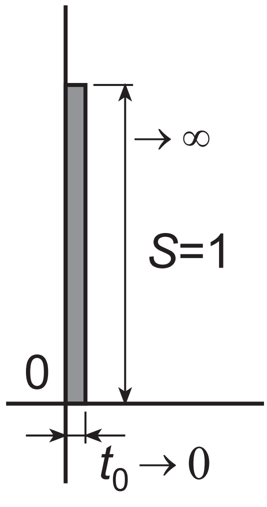
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

Mohutnost jednotkového impulsu je tedy rovna 1.

Matematická definice jednotkového impulsu (spojité funkce)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

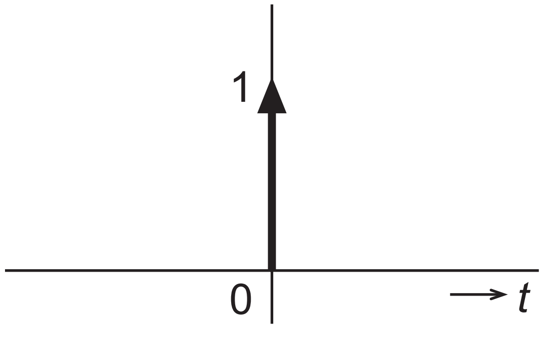
Pro účely analýzy elektrických obvodů (v matematice existují další definice) bude jednotkový impuls definován:



V praxi nelze samozřejmě takový impuls vytvořit, pro konkrétní obvod ale stačí, pokud $t_0 \ll \tau$ (nejkratší časová konstanta obvodu)

Velký význam má u diskrétních obvodů, kde přechází na prosté číslo 1 (a např. u obvodů typu FIR je impulsová odezva rovna přímo koeficientům filtru).

Grafické znázornění:



Laplaceův obraz:

$$\mathcal{L}\{w(t)\}=1$$

Jednotkový skok

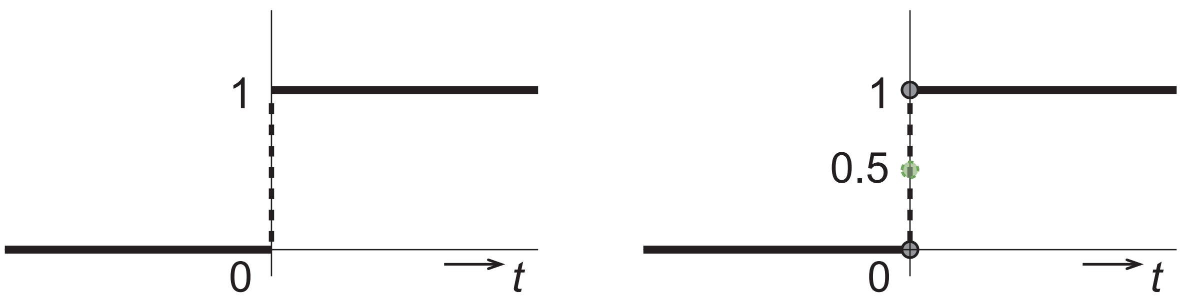
$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

Časté je značení $u(t)$, v elektrických obvodech by se ale pletlo s napětím.

Velikost skoku v bodě 0 budeme v elektrických obvodech předpokládat $1(0_-)=0$, $1(0_+)=1$, matematicky se jednotkový skok často zobecňuje

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 0.5, & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

Graficky jednotkový skok znázorníme:



Mezi jednotkovým impulsem a jednotkovým skokem se někdy uvádí vztah

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt},\qquad 1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

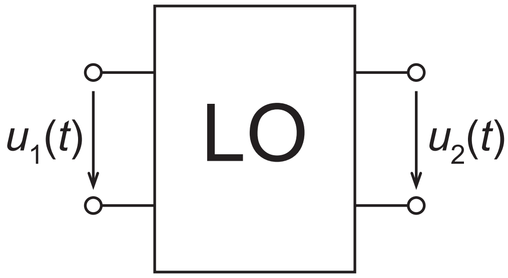
Ačkoli rigorózní matematika by mohla mít k uvedeným rovnicím oprávněné výhrady (teorie distribucí), rovnice poskytují dobrou představu o relaci mezi těmito funkcemi – *viz minulý semestr, měření napětí a proudu na L, C; pokud tyto prvky jednu obvodovou veličinu derivovaly, a tato obvodová veličina měla obdélníkový průběh, objevil se jako druhá veličina (přibližně) „diracův impuls“.*

Praktická realizace – připojení zdroje napětí o velikosti 1V.

Laplaceův obraz: $\mathcal{L}\{1(t)\}=\dfrac{1}{p}$

Impulsní a přechodová charakteristika

Uvažujme lineární obvod, který byl v čase $t = 0$ bez energie.



Vztah mezi vstupním a výstupním napětím můžeme popsat v oboru (Laplaceových) obrazů přenosem

$$P(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}.$$

Obdobně bychom mohli přenos vyjádřit pro fázory (HUS), nebo $j\omega$ (Fourierova transformace), ale nikdy ne v časové oblasti.

Např. $u_1(t)$ *je stejnosměrné napětí, na výstupu se může objevit kupř. exponencielní impuls – podíl funkcí bude obecně v každém časovém okamžiku různý, zatímco přenos je stále stejná racionálně lomená funkce. V HUS vede přenos na komplexní číslo, které se mění s frekvencí (amplituda a fáze, v časové oblasti amplituda a časové zpoždění).*

Impulsní charakteristika $u_1(t) = \delta(t), \quad w(t) = u_2(t)$

Přechodová charakteristika $u_1(t) = 1(t), \quad a(t) = u_2(t)$

V případě obrazů je přímo daný vztah mezi přenosem obvodu a obrazem impulsní / přechodové charakteristiky:

$$U_2(p) = W(p) = 1 \cdot P(p) = P(p)$$

$$\boxed{W(p) = P(p)}$$

$$U_2(p) = A(p) = \frac{1}{p} \cdot P(p) = \frac{P(p)}{p}$$

$$\boxed{A(p) = \frac{P(p)}{p} \quad \Rightarrow \quad P(p) = pA(p)}$$

Změřením časového průběho výstupního napětí $u_2(t)$ a jeho transformací tak nalezneme přenos neznámého obvodu. Odtud můžeme nalézt m.j. *kmitočtovou charakteristiku* obvodu.

Pro impulsní charakteristiku platí obdobně pro Fourierův obraz

$$w(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{P(j\omega)\right\},$$

ale ekvivalentní vztah neexistuje pro přechodovou charakteristiku (neexistuje Fourierův obraz jedtnotkového skoku).

Vztah mezi impulsní a přechodovou charakteristikou v časové oblasti můžeme nalézt z vlastností obrazů derivace a integrálu:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} = pU(p) - u(0_+), \qquad u(0_+) = \lim_{t\to 0_+} u(t)$$

$$P(p) = W(p) = p \cdot A(p) = \mathcal{L}\left\{\frac{da(t)}{dt}\right\} + a(0_+)$$

$$\boxed{w(t) = \frac{da(t)}{dt} + a(0_+)\delta(t)}$$

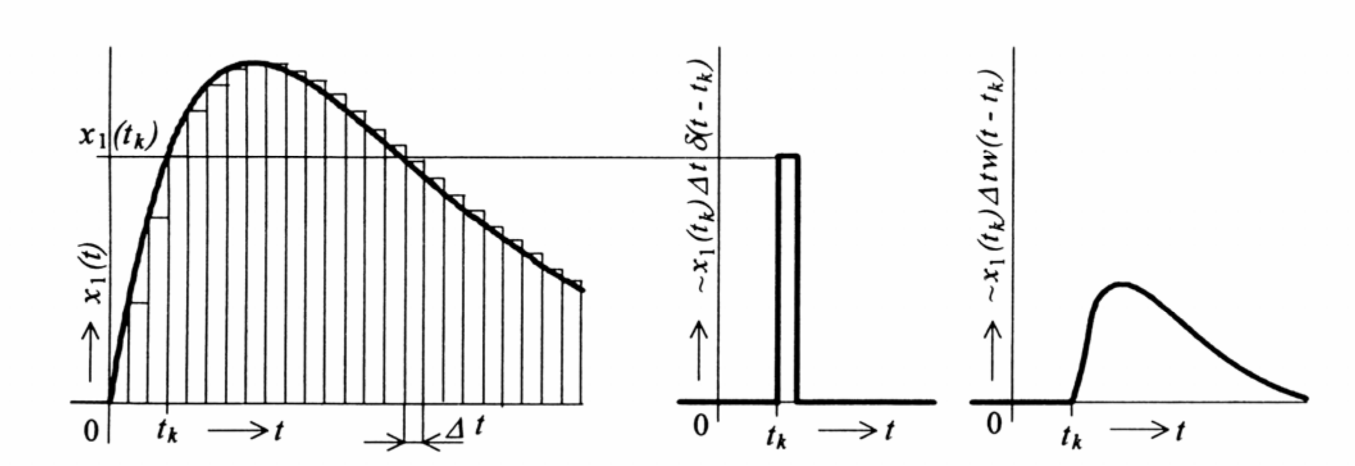
$$\boxed{a(t) = \int_0^t w(\tau)\,d\tau + a(0_+)}$$

Konvoluce

Jak vyjádřit vztah mezi vstupním napětím $u_1(t)$ a $u_2(t)$ přímo v časové oblasti?

Takový vztah již vyjádřit umíme – bohužel pouze pro dva signály – jednotkový impuls $\delta(t)$ a jednotkový skok $1(t)$. Výstupním napětím je impulsní, resp. přechodová charakteristika.

Různé časové průběhy je možné aproximovat (nekonečně mnoha) jednotkovými impulsy, resp. jednotkovými skoky, násobené funkční hodnotou pro daný časový okamžik. $\Rightarrow$ součet impulsních (přechodových) charakteristik.



Vzdálenost mezi impulsy	Δt
Mohutnost impulsu	$\Delta t \cdot x_1(t_k)$
Odpovídající výstupní napětí	$\Delta t \cdot x_1(t_k) \cdot w(t-t_k)$

Celkové výstupní napětí bude součtem reakcí na jednotlivé impulsy (impulsních charakteristik),

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^{n} \Delta t \cdot x_1(t_k) \cdot w(t-t_k)$$

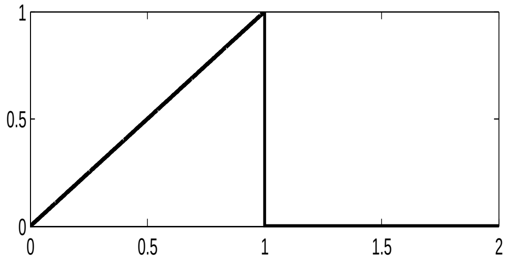
které pro $\Delta t \to 0$ přejde v integraci – **konvolutorní integrál**

$$\boxed{x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau}$$

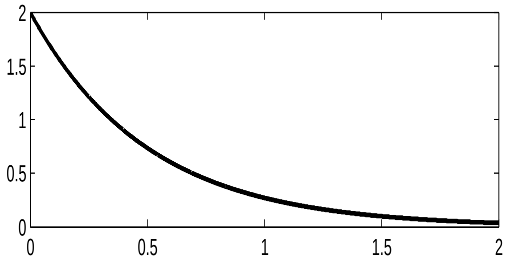
Symbolem konvoluce je hvězdička (*) a platí:

$$x_2(t) = x_1(t) * w(t) = \int_0^t x_1(t) w(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_1(t-\tau) w(t) d\tau$$

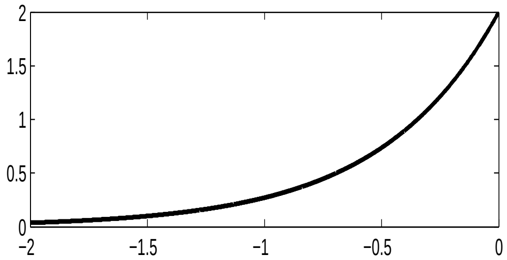
Geometrický význam:



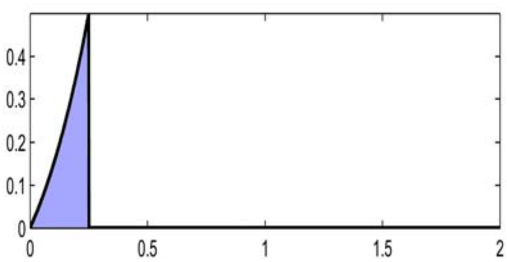
$u_1(\tau)$



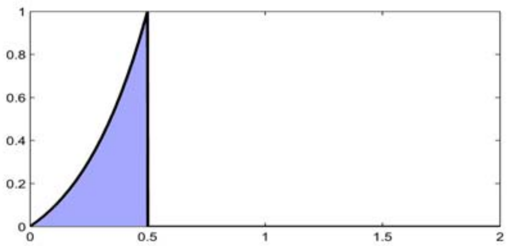
$w(\tau)$



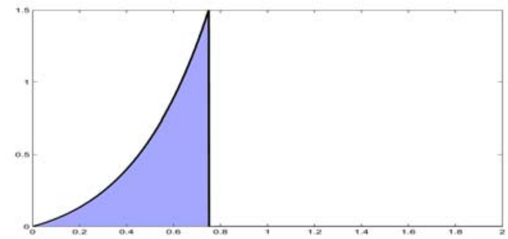
$w(-\tau)$



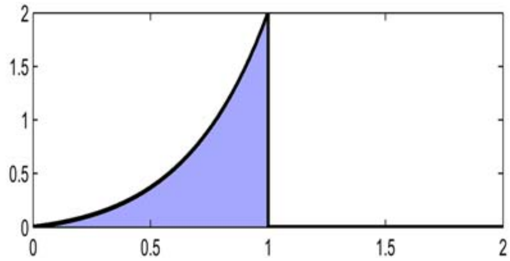
$u_1(\tau) w(0.25-\tau), \quad S = u_2(0.25)$



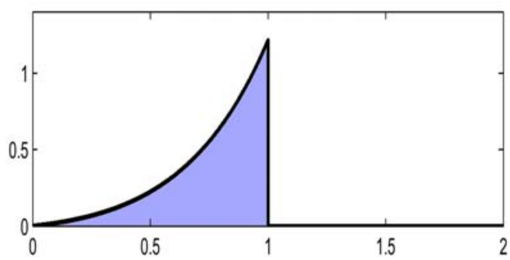
$u_1(\tau) w(0.5-\tau), \quad S = u_2(0.5)$



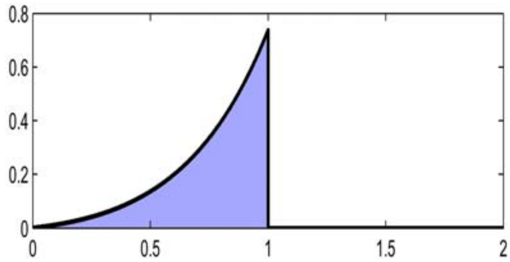
$u_1(\tau) w(0.75-\tau), \quad S = u_2(0.75)$



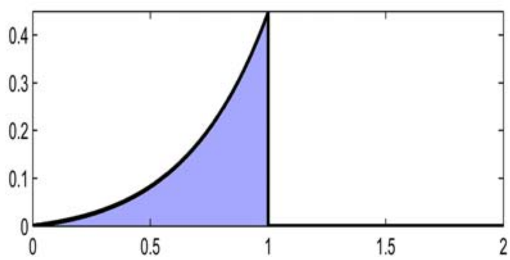
$u_1(\tau) w(1-\tau), \quad S = u_2(1)$



$u_1(\tau) w(1.25-\tau), \quad S = u_2(1.25)$



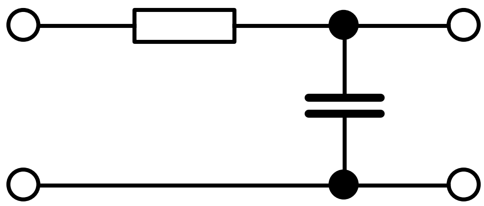
$u_1(\tau) w(1.5-\tau), \quad S = u_2(1.5)$

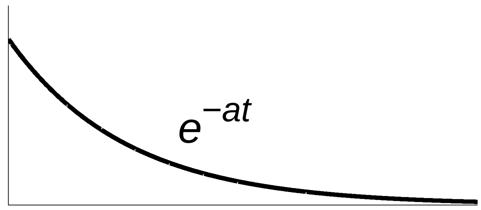


$u_1(\tau) w(1.75-\tau), \quad S = u_2(1.75)$

Příklad:

Mějme RC integrační článek, buzený ze zdroje $u_1(t) = U_0 e^{-at}$





Úkol: najít časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$.

a) Laplaceova transformace + přenos

$$P(p) = \frac{1}{1+pRC} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}, \qquad U_1(p) = \frac{U_0}{p+a}$$

$$U_2(p) = \frac{U_0}{p+a} \cdot \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} - a} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \right)$$

$$u_2(t) = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} - a} \left(e^{-at} - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

b) Impulsní charakteristika + konvoluce

$$w(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}, \qquad u_1(t) = U_0 e^{-at}$$

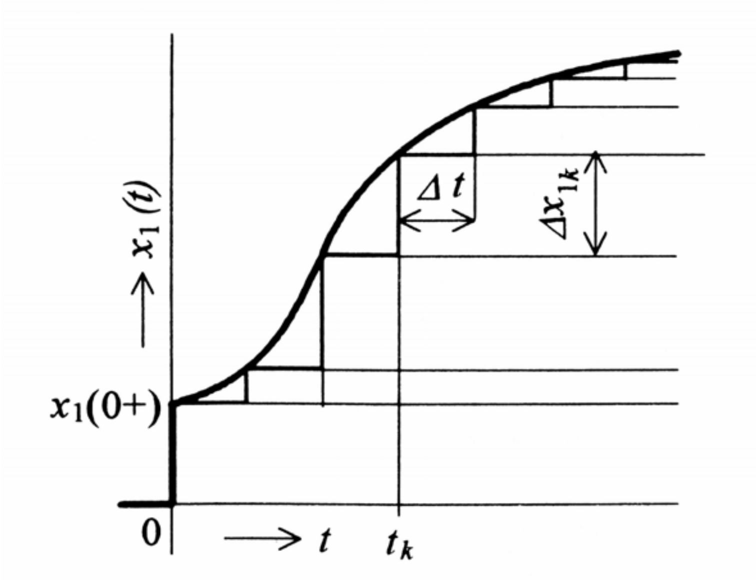
$$u_2(t) = u_1(t) * w(t) = \int_0^t U_0 e^{-a\tau} \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{U_0}{RC} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{RC} - a\right)\tau - \frac{1}{RC}t} d\tau = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} - a} \left(e^{-at} - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

c) Přechodová charakteristika + Duhamelův vzorec, viz dále

Duhamelův vzorec

Namísto obdélníkových impulsů jako v případě konvoluce je možné vstupní veličinu aproximovat pomocí skokových funkcí:



Vzdálenost mezi skoky	Δt
Výška skoku	$\Delta x_{1k} \doteq x_1'(t_k)\Delta t$
Odpovídající výstupní napětí	$\Delta x_{1k}(t_k)\cdot a(t-t_k)$

Časový průběh výstupního napětí $u_2(t)$ bude součtem všech odezev obvodu na jednotlivé skoky

$$x_2(t) = x_1(0_+)a(t) + \sum_{k=1}^{n} x_1'(t_k)a(t-t_k)\Delta t$$

Pokud $\Delta t \to 0$, pak součet přechází v integraci a dostaneme ***Duhamelův vzorec***

$$\boxed{x_2(t) = x_1(0_+)a(t) + \int_0^t x_1'(\tau)a(t-\tau)d\tau}$$

Z operátorového počtu:

$$X_2(p) = X_1(p)P(p) = X_1(p)\cdot p\cdot A(p)$$

$$pX_1(p) = \mathcal{L}\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}\right\} + x_1(0_+), \qquad pA(p) = \mathcal{L}\left\{\frac{da(t)}{dt}\right\} + a(0_+)$$

$$X_2(p) = \left[\mathcal{L}\left\{ \frac{dx_1(t)}{dt} \right\} + x_1(0_+) \right] A(p) =$$

$$= \left[\mathcal{L}\left\{ \frac{da(t)}{dt} \right\} + a(0_+) \right] X_1(p)$$

Zpětnou transformací další tvary Duhamelova vzorce:

$$u_2(t) = x_1(0_+)a(t) + x_1'(t) * a(t) = x_1(0_+)a(t) + \int_0^t x_1'(\tau)a(t-\tau)d\tau$$

Nebo

$$u_2(t) = a(0_+)x_1(t) + x_1(t) * a'(t) = a(0_+)x_1(t) + \int_0^t x_1(\tau)a'(t-\tau)d\tau =$$

$$= a(0_+)x_1(t) + \int_0^t x_1(t-\tau)a'(\tau)d\tau$$

Stabilita

Obvod nazveme stabilním, pokud se po odeznění budících veličin postupně navrátí do stabilního stavu, tedy

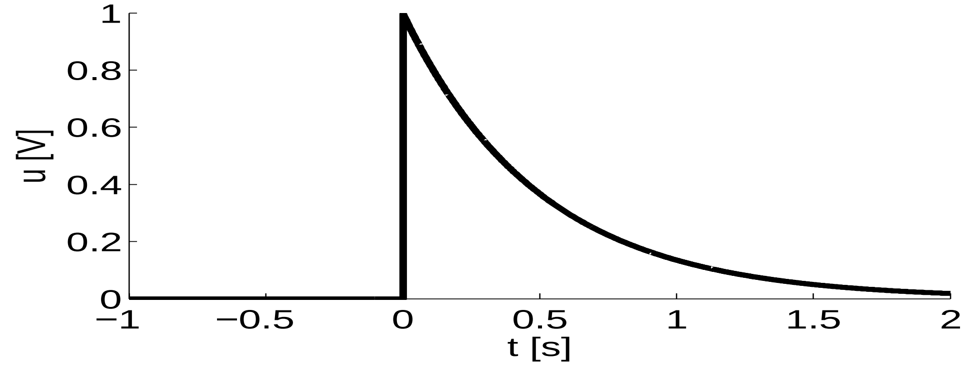
$$\lim_{t\to\infty} u_2(t) = u_p(t) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} w(t) = u_p(t)$$

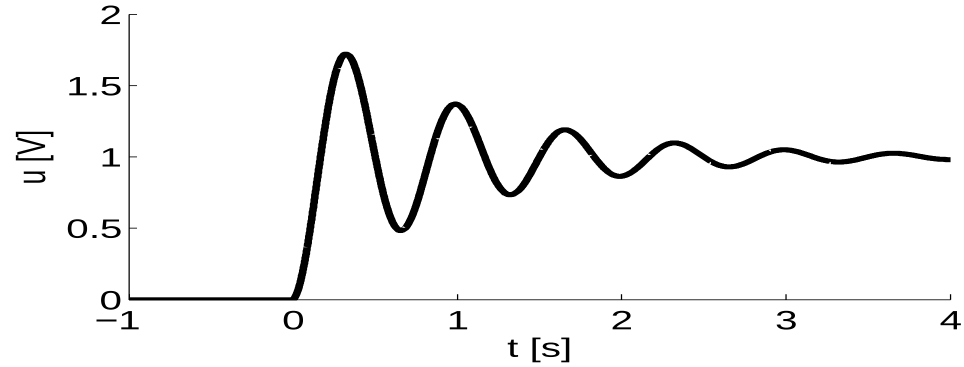
jinými slovy, **odezní přechodná složka**

Takový obvod je **stabilní**. Obvody rozdělujeme na

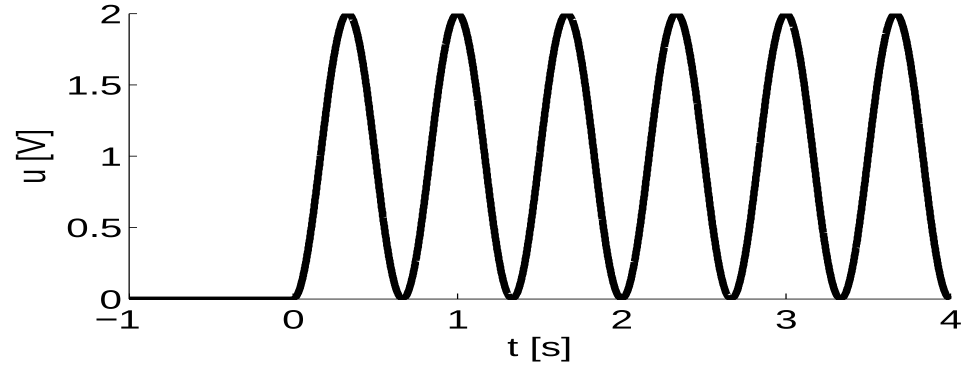
- **stabilní**
- **na mezi stability**
- **nestabilní**

Stabilní obvody

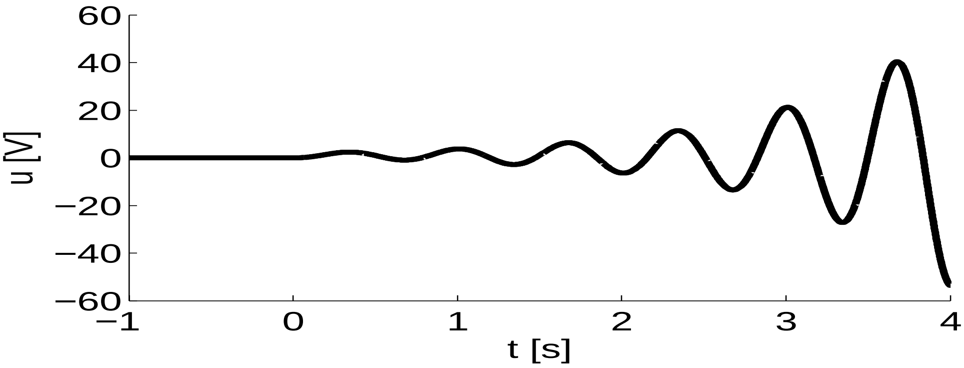




Obvod na mezi stability



Nestabilní obvod



Při studiu přechodných dějů jsme poznali, že *obecné řešení*, které popisuje vlastní *přechodnou složku* **nezávisí na charakteru buzení** ⇒ **impulsní charakteristika je obecným řešením přechodného děje**

Polynom v čitateli přenosu musí být nižšího stupně, nežli stupeň polynomu ve jmenovateli:

$$W(p) = P(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = D + \frac{Q(p)}{N(p)}$$

Pak

$$w(t) = D\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\}$$

Zpětná transformace – rozklad na parciální zlomky, je určena polynomem $N(p)$; kořeny – póly mohou být

- reálné $w(t) = \cdots + K_n e^{-p_n t} + \cdots$
- vícenásobné $w(t) = \cdots + (K_{n1} + K_{n2}t + \cdots)e^{-p_n t} + \cdots$
- komplexně sdružené $w(t) = \cdots + K_n \sin(\omega_n t + \psi_n)e^{-\alpha_n t} + \cdots$

Ve všech případech obsahuje řešení exponenciální funkci, takže pokud je pól (jeho reálná část) **záporný**, je obvod **stabilní**, pro **kladný** pól **nestabilní**

p - rovina